



# Modélisation par éléments finis de matériaux composites magnéto-électriques

Thu Trang Nguyen

## ► To cite this version:

Thu Trang Nguyen. Modélisation par éléments finis de matériaux composites magnéto-électriques. Autre. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112271 . tel-00663218

**HAL Id: tel-00663218**

**<https://theses.hal.science/tel-00663218>**

Submitted on 26 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : ???



**U.F.R. des Sciences d'Orsay**

Thèse présentée par

**Thu Trang NGUYEN**

pour obtenir le grade de

**Docteur en Sciences de l'Université Paris XI**

Spécialité :

**Génie Électrique**

Sujet de la thèse :

**Modélisation par éléments finis  
de matériaux composites  
magnéto-électriques**

Thèse soutenue le ??? devant le jury composé de :

Gérard MEUNIER	Président
Christophe GEUZAINÉ	Rapporteur
Benoît GUIFFARD	Rapporteur
Frédéric BOUILLAUT	Examineur
Laurent DANIEL	Examineur
Xavier MININGER	Examineur



# Table des matières

Notations	vii
Introduction	1
<b>1 Effet magnéto-électrique</b>	<b>3</b>
1.1 Définition de l'effet magnéto-électrique . . . . .	5
1.2 Historique du phénomène magnéto-électrique . . . . .	6
1.2.1 Effet ME intrinsèque . . . . .	6
1.2.2 Effet ME extrinsèque . . . . .	6
1.2.3 Applications des matériaux ME composites . . . . .	8
1.3 Couplages MM et EM . . . . .	12
1.3.1 Couplage magnéto-mécanique . . . . .	12
1.3.2 Couplage électro-mécanique . . . . .	16
1.3.3 Comparaison entre les matériaux magnétostrictifs et piézo- électriques . . . . .	19
1.3.4 Modélisation du phénomène ME . . . . .	19
1.4 Conclusion . . . . .	22
<b>2 Modélisation du problème magnéto-électrique</b>	<b>23</b>
2.1 Equations d'équilibre . . . . .	25
2.1.1 Problème électromagnétique . . . . .	25
2.1.2 Problème mécanique . . . . .	26
2.2 Lois de comportement non couplé . . . . .	28
2.2.1 Lois de comportement électromagnétique . . . . .	28
2.2.2 Loi de comportement mécanique . . . . .	29
2.3 Loi de comportement magnéto-mécanique . . . . .	30
2.3.1 Phénoménologie . . . . .	31
2.3.2 Loi de comportement du matériau magnétostrictif . . . . .	32
2.3.3 Loi de comportement piézo-magnétique . . . . .	38
2.4 Loi de comportement électro-mécanique . . . . .	42
2.4.1 Phénoménologie . . . . .	42
2.4.2 Loi de comportement du matériau piézoélectrique . . . . .	42
2.4.3 Modèle linéaire piézoélectrique . . . . .	43
2.5 Conclusion . . . . .	43

<b>3</b>	<b>Méthode des éléments finis pour les comportements couplés</b>	<b>45</b>
3.1	Modèle bidimensionnel . . . . .	47
3.1.1	Loi de comportement pour le problème 2D . . . . .	47
3.1.2	Hypothèses du problème mécanique . . . . .	48
3.1.3	Hypothèses du problème électromagnétique . . . . .	49
3.2	Problème couplé électro-magnéto-mécanique . . . . .	52
3.2.1	Méthode de Galerkin . . . . .	52
3.2.2	Formulation mécanique . . . . .	54
3.2.3	Formulation électrique . . . . .	57
3.2.4	Formulation magnétique . . . . .	57
3.3	Structures élémentaires : bilame et trilame . . . . .	59
3.3.1	Modèle 2D complet . . . . .	66
3.3.2	Comparaisons . . . . .	70
3.4	Conclusions . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>75</b>
4.1	Inductance Variable . . . . .	77
4.1.1	Description du dispositif . . . . .	77
4.1.2	Lois de comportement . . . . .	78
4.1.3	Analyse numérique et validation expérimentale . . . . .	78
4.2	Capteur magnétique . . . . .	81
4.2.1	Description du dispositif . . . . .	81
4.2.2	Analyse numérique du capteur et comparaison expérimentale . . . . .	86
4.2.3	Conclusion . . . . .	95
	<b>Conclusions - Perspectives</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>101</b>
	<b>Annexes</b>	<b>107</b>
<b>A</b>	<b>Notation et Opération sur des vecteurs et tenseurs</b>	<b>109</b>
A.1	Notation sur des tenseurs symétriques . . . . .	111
A.2	Convention de sommation d'Einstein . . . . .	111
A.3	Opérations sur les tenseurs . . . . .	112
A.3.1	L'opérateur produit contracté . . . . .	112
A.3.2	L'opérateur produit doublement contracté . . . . .	112
A.4	Gradient . . . . .	112
A.5	Rotationnel . . . . .	113
A.6	Divergence . . . . .	113
<b>B</b>	<b>Loi de comportement d'électrostriction</b>	<b>115</b>
B.1	Loi de comportement d'électrostriction . . . . .	117
B.1.1	Etude énergétique . . . . .	117
B.1.2	Loi de comportement mécanique . . . . .	118
B.1.3	Loi de comportement électrique . . . . .	118

B.2	Loi de comportement linéaire piézoélectrique . . . . .	120
B.2.1	Modèle équivalent . . . . .	120
<b>C</b>	<b>Notes sur les formulations éléments finis</b>	<b>123</b>
C.1	Formulation éléments finis utilisant les variables $t^*$ , $a^*$ . . . . .	125
<b>D</b>	<b>Algorithmes du modélisation du capteur magnétique</b>	<b>127</b>
D.1	Calcul statique . . . . .	129
D.1.1	Initialisation . . . . .	129
D.1.2	Calcul itératif et convergence . . . . .	129
D.1.3	Algorithme de la partie statique . . . . .	129
D.2	Calcul harmonique . . . . .	130
D.2.1	Calcul des coefficients de magnétostriction . . . . .	130
D.2.2	Calcul de la tension . . . . .	131



# Table des figures

1.1	<i>Effet magnéto-électrique direct et inverse</i> . . . . .	5
1.2	<i>Effet magnéto-électrique intrinsèque</i> . . . . .	6
1.3	<i>Effet magnéto-électrique extrinsèque</i> . . . . .	7
1.4	<i>Structures ME composites</i> . . . . .	7
1.5	<i>Effet de résonance du coefficient ME en fonction de la fréquence pour une structure trilame</i> . . . . .	8
1.6	<i>Capteur magnétique dynamique [Dong et al., 2003]</i> . . . . .	9
1.7	<i>Capteur magnétique statique [Park et al., 2009]</i> . . . . .	10
1.8	<i>Inductance variable [Lou et al., 2009]</i> . . . . .	11
1.9	<i>Transformateur basé sur le principe de l'effet magnéto-électrique</i> . . .	11
1.10	<i>Courbe d'aimantation et déformation de magnétostriction du Terfenol-D</i> . . . . .	13
1.11	<i>Domaines et paroi magnétique</i> . . . . .	14
1.12	<i>Processus d'aimantation d'un monocristal cubique [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a]</i> . . . . .	14
1.13	<i>Principaux modes de magnétostriction [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a]</i> . . . . .	15
1.14	<i>Aimantation avec magnétostriction positive sous une contrainte mécanique uniaxiale [Cullity, 1972]</i> . . . . .	15
1.15	<i>Origine microscopique de la piézoélectricité</i> . . . . .	16
1.16	<i>Courbe d'aimantation et déformation d'un PZT [Heywang et al., 2008]</i>	17
1.17	<i>Processus de polarisation</i> . . . . .	18
1.18	<i>Nombre de publications sur l'effet magnéto-électrique</i> . . . . .	20
2.1	<i>Couplage magnéto-électrique extrinsèque</i> . . . . .	30
2.2	<i>La déformation à contrainte nulle d'échantillon FeCo</i> . . . . .	31
2.3	<i>Courbe d'aimantation : Induction magnétique en fonction de champ magnétique</i> . . . . .	37
2.4	<i>Processus de calcul dans le cas harmonique</i> . . . . .	41
3.1	<i>Illustration de l'hypothèse de contrainte plane</i> . . . . .	48
3.2	<i>Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann</i> . . . . .	54
3.3	<i>Domaines d'étude et maillages correspondant des structures composites</i>	59
3.4	<i>Distribution de l'induction magnétique, des potentiels électriques et de la déformation totale (<math>f = 10</math> Hz)</i> . . . . .	62



3.5	<i>Distribution de l'induction magnétique, des potentiels électriques et de la déformation totale (<math>f = 1\text{kHz}</math>)</i>	63
3.6	<i>Distribution de l'induction magnétique, des potentiels électriques et de la déformation totale (<math>f = 10\text{ kHz}</math>)</i>	64
3.7	<i>Evolution des parties réelle et imaginaire du potentiel électrique en fonction de la fréquence</i>	65
3.8	<i>Evolution des parties réelle et imaginaire du potentiel électrique en fonction de la fréquence</i>	66
3.9	<i>Induction magnétique à la fréquence 10 Hz</i>	71
3.10	<i>Induction magnétique à la fréquence 100 kHz</i>	71
3.11	<i>Formulation complète : induction magnétique suivant <math>z</math></i>	72
4.1	<i>Domaine d'étude de l'inductance variable</i>	77
4.2	<i>Algorithme de calcul de l'inductance équivalente</i>	79
4.3	<i>Distribution de l'induction magnétique dans le trilame</i>	80
4.4	<i>Evolution de l'inductance en fonction de la fréquence pour différentes sollicitations électriques. Résultats numériques (a) et expérimentaux (b)</i>	80
4.5	<i>Accordabilité de l'inductance variable</i>	81
4.6	<i>Capteur de champ magnétique ME</i>	82
4.7	<i>Domaines d'étude et maillage correspondant des structures composites</i>	82
4.8	<i>Coefficient <math>q_{11}</math></i>	84
4.9	<i>Coefficient <math>q_{21}</math></i>	85
4.10	<i>Coefficient <math>q_{31}</math></i>	85
4.11	<i>Schéma de résolution numérique pour le problème du capteur</i>	87
4.12	<i>Evolution de la tension en fonction de la fréquence de travail</i>	88
4.13	<i>Évolution du potentiel électrique <math>v_{ac}</math></i>	88
4.14	<i>Résultat expérimental [Giang et Duc, 2009]</i>	89
4.15	<i>Structure proposée par Fetisov et al [Fetisov et al., 2011]</i>	89
4.16	<i>Evolution de la tension en fonction de la fréquence appliquée</i>	90
4.17	<i>Comparaison des tensions obtenues pour le bilame et la nouvelle structure</i>	90
4.18	<i>Evolution de la tension <math>v_{ac}</math> en fonction de la perméabilité relative</i>	91
4.19	<i>Evolution de la tension en fonction des paramètres <math>\beta</math> et <math>\mu_0\mathbf{M}_s</math></i>	91
4.20	<i>Orientation du champ magnétique à mesurer</i>	92
4.21	<i>Résultats numériques : évolution du potentiel électrique en fonction de l'orientation et de l'amplitude du champ appliqué</i>	93
4.22	<i>Résultats expérimentaux : évolution du potentiel électrique en fonction de l'orientation et de l'amplitude du champ appliqué</i>	94
D.1	<i>Algorithme du calcul statique</i>	130
D.2	<i>Algorithme de calcul des coefficients magnétostrictifs et de la perméabilité</i>	130

# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques de quelques matériaux magnétostrictifs : déformation de magnétostriction et induction magnétique à saturation . . . .	13
1.2	Propriétés de quelques matériaux piézoélectriques [Heywang <i>et al.</i> , 2008] . . . . .	17
1.3	Comparaison entre matériaux magnétostrictifs/piézoélectriques . . . .	19
3.1	Description des paramètres matériaux utilisés pour l'analyse des structures composites [Y.X.Liu <i>et al.</i> , 2003b] . . . . .	60
4.1	Paramètres matériaux utilisés pour l'inductance variable . . . . .	79
4.2	Description des paramètres des matériaux utilisés pour le capteur de champ magnétique . . . . .	86



# Notations

<b>H</b>	Champ magnétique.
<b>B</b>	Induction magnétique.
<b>M</b>	Aimantation.
<b>H<sup>c</sup></b>	Champ magnétique coercitif.
<b>E</b>	Champ électrique.
<b>D</b>	Induction électrique.
<b>P</b>	Polarisation électrique.
<b>J</b>	Densité de courant.
<b>a</b>	Potentiel vecteur magnétique.
$\phi$	Potentiel scalaire électrique.
<b>T</b>	Tenseur des contraintes.
<b>S</b>	Tenseur des déformations.
<b>S<sup>e</sup></b>	Tenseur des déformations élastiques.
<b>S<sup>μ</sup></b>	Tenseur des déformations de magnétostriction.
<b>u</b>	Déplacement (mécanique).
<b>F</b>	Force globale.
<b>f</b>	Densité de force.
<b>f<sub>s</sub></b>	Densité de force surfacique.
<b>W</b>	Énergie potentielle.
<b>w</b>	Densité d'énergie potentielle.
<b>I</b>	Matrice d'identité
$\partial_x$ ou $\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivation par rapport à x.

## Paramètres matériaux

$\chi^m$	Tenseur de susceptibilité magnétique.
$\mu$	Tenseur de perméabilité magnétique.
$\nu$	Tenseur de reluctivité magnétique.
$\chi^e$	Tenseur des susceptibilité électrique.
$\varepsilon$	Tenseur des permittivité diélectrique.
$\varrho$	Conductivité électrique.
$\mathbb{C}$	Tenseur des modules élastiques.
$Y$	Module de Young.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\mu^* \quad \lambda^*$	Coefficient de Lamé.
$\rho_m$	Densité de masse volumique.
$\lambda_s$	Déformation de magnétostriction à saturation.
$B_{sat}$	Induction magnétique à saturation.
$\alpha_{ikl}$	Coefficients piézo-électriques.
$q_{ikl}$	Coefficients piézo-magnétiques.
$\beta_n$	Coefficients polynomiaux du modèle de déformation de magnétostriction.
$\nu^{eq}$	Tenseur des réluctivités équivalentes de magnétostriction.

## Convention de notation pour les éléments finis

$n_n$	Nombre total de nœuds du domaine d'étude.
$n_m$	Nombre de nœuds mécaniques du domaine d'étude.
$n_\phi$	Nombre de nœuds "électriques" du domaine d'étude.
$n_e$	Nombre d'éléments du domaine d'étude.
$n_a^e$	Nombre d'arêtes de l'élément e.
$n_n^e$	Nombre de nœuds de l'élément e.
$\Omega_e$	Domaine de l'élément e.
$w_n$	Fonction de forme nodale.
$w_a$	Fonction de forme d'arête.
$[\mathbf{J}]$	Matrice Jacobienne.
$ \mathbf{J} $	Déterminant de la matrice Jacobienne.

---

## Introduction générale

La recherche sur les matériaux actifs suscite un grand intérêt. Le développement de dispositifs innovants à base de matériaux actifs est de plus en plus intensif. La recherche sur ces matériaux prend alors un rôle primordial. Des outils de modélisation sont indispensables pour contribuer à optimiser les structures de ces nouveaux systèmes.

Ces matériaux actifs ont un comportement dit multi-physique. Ce terme implique la dépendance entre au moins deux "physiques" parmi l'électricité, le magnétisme, la mécanique et la thermique...

Les matériaux piézoélectriques présentent un couplage électro-mécanique : l'application d'une contrainte conduit à une modification des propriétés diélectriques du matériau. Réciproquement, l'application d'un champ électrique déforme le matériau. Ces sont des matériaux de plus en plus employés, avec des applications très variées, comme des capteurs de pression ou d'accélération, des actionneurs dans le contrôle de vibration, des transformateurs ou des moteurs.

Le couplage "magnéto-mécanique" est présent dans les matériaux magnétostrictifs. Certains sont appelés matériaux à magnétostriction géante car ils se déforment fortement (de l'ordre de  $10^{-3}$  à saturation) sous l'action d'un champ magnétique. De nombreuses applications peuvent être envisagées avec ces matériaux, comme par exemple des transducteurs hydroacoustiques, les microvalves, ou des micromoteurs linéaires ou rotatifs.

Les matériaux magnéto-électriques sont des matériaux actifs qui sont aujourd'hui au cœur de nombreuses thématiques de recherche. La caractéristique principale de ces matériaux est la modification de la polarisation électrique induite par un champ magnétique. Inversement, un champ électrique peut modifier l'aimantation de ces matériaux.

Les matériaux magnéto-électriques sont classés en deux catégories. La première est constituée de matériaux homogènes dans lesquels l'effet magnéto-électrique est intrinsèque. La conversion d'énergie obtenue en pratique par ce type de matériaux est faible. La seconde catégorie est composée de matériaux composites. L'association de matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs crée un effet magnéto-électrique extrinsèque. La présence d'un champ magnétique permet de créer une déformation

de magnétostriction. Celle-ci est transmise au matériau piézoélectrique, et une polarisation électrique est alors créée. Inversement, l'application d'un champ électrique engendre une contrainte qui peut modifier l'état magnétique des matériaux magnétostrictifs. La conversion d'énergie résultante des deux couplages successifs est plus importante que pour l'effet intrinsèque. L'intérêt de l'utilisation des matériaux composites est d'allier les avantages de chaque constituant. L'objet de la thèse porte sur la modélisation des matériaux composites présentant l'effet magnétoélectrique. Le modèle numérique développé résout simultanément par éléments finis les problèmes magnéto-mécanique et électro-mécanique. Les dispositifs à modéliser fonctionnent en régime statique et/ou en régime dynamique. Il est donc nécessaire de définir des lois de comportement adaptées à ces possibilités de fonctionnement. La difficulté principale est de décrire d'une part le comportement non-linéaire de la déformation de magnétostriction et, d'autre part le comportement des matériaux et des structures en régime dynamique.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Le premier chapitre présente le cadre dans lequel s'inscrit ce travail de thèse et l'effet magnéto-électrique, qu'il soit intrinsèque ou extrinsèque. Le chapitre propose également un état de l'art de la modélisation de cet effet.

Le début du deuxième chapitre présente les relations d'équilibre électromagnétique et mécanique et les lois de comportement non couplées électromagnétiques et mécaniques. La partie suivante est consacrée à l'introduction des lois de comportement couplées. La loi de comportement du matériau piézoélectrique est considérée linéaire. En revanche, la loi de comportement magnéto-mécanique est supposée non-linéaire, la déformation de magnétostriction étant pour notre étude une fonction quadratique du champ magnétique ou de l'aimantation. La loi de comportement magnéto-électrique est obtenue par le couplage des relations piézoélectrique et magnétostrictive. Pour permettre l'étude des dispositifs fonctionnant en fréquence, les lois de comportement sont ensuite linéarisées autour d'un point de polarisation.

Le troisième chapitre concerne la modélisation par éléments finis de l'effet magnéto-électrique extrinsèque dans le cas 2D. Certaines hypothèses électromagnétiques et mécaniques doivent alors être prises en considération. Une formulation 2D complète est proposée afin de valider les hypothèses utilisées. L'outil est dans un premier temps appliqué à des structures multicouches bilames et trilames.

Dans le dernier chapitre, le modèle développé est exploité sur des dispositifs particuliers à base de matériaux magnéto-électriques. Le premier dispositif permet d'obtenir une inductance variable pilotée par un champ électrique. Le deuxième est un capteur de champ magnétique statique. Il nécessite un champ magnétique dynamique additionnel qui permet d'amplifier la tension mesurée. Les résultats obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux issus de la littérature. L'outil numérique doit permettre également d'aider à optimiser des structures existantes.

# Chapitre 1

## Effet magnéto-électrique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Définition de l'effet magnéto-électrique . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Historique du phénomène magnéto-électrique . . . . .</b>	<b>6</b>
1.2.1	Effet ME intrinsèque . . . . .	6
1.2.2	Effet ME extrinsèque . . . . .	6
1.2.3	Applications des matériaux ME composites . . . . .	8
<b>1.3</b>	<b>Couplages MM et EM . . . . .</b>	<b>12</b>
1.3.1	Couplage magnéto-mécanique . . . . .	12
1.3.2	Couplage électro-mécanique . . . . .	16
1.3.3	Comparaison entre les matériaux magnétostrictifs et piézo- électriques . . . . .	19
1.3.4	Modélisation du phénomène ME . . . . .	19
<b>1.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>22</b>

---





Ce chapitre commence par la définition de l'effet magnéto-électrique (ME) et de son coefficient caractéristique suivant le régime d'excitation considéré. Après un rapide historique de l'effet magnéto-électrique, les effets intrinsèque et extrinsèque sont présentés. Les principales applications utilisant l'effet magnéto-électrique sont ensuite décrites brièvement. Cette présentation permet de justifier le choix du développement d'une modélisation qui porte sur l'effet magnéto-électrique extrinsèque. Les matériaux magnéto-électriques composites étant obtenus en associant des matériaux à couplages magnéto-élastique et électro-élastique, l'origine physique de ces phénomènes est introduite. La dernière partie de ce chapitre se concentre sur l'état de l'art de la modélisation du comportement de ces matériaux et de l'effet ME.

## 1.1 Définition de l'effet magnéto-électrique

- **Effet direct** : modification de l'état électrique induite par un champ magnétique.
- **Effet inverse** : modification de l'état magnétique induite par un champ électrique.

L'effet ME est caractérisé par le coefficient ME. Un champ magnétique  $\mathbf{H}$  appliqué sur un échantillon ME d'épaisseur  $e$  crée une polarisation électrique à l'intérieur de l'échantillon et donc un potentiel électrique  $V_{ME}$  (figure 1.1).

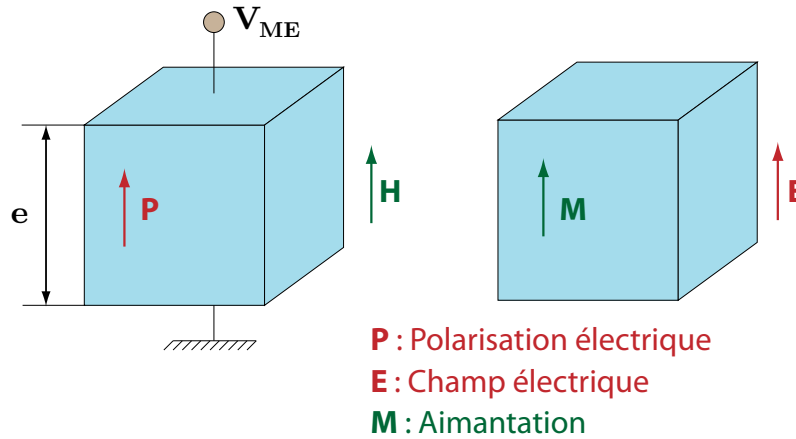


Figure 1.1 – *Effet magnéto-électrique direct et inverse*

- En régime statique, le coefficient ME est défini par :

$$\alpha_{ME} = \frac{V_{ME}}{e \times \|\mathbf{H}\|} \quad (1.1)$$

- En régime dynamique :  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{h}}$ , où  $\mathbf{H}_0$  est la composante statique et  $\tilde{\mathbf{h}}$  la composante harmonique. On définit alors :

$$\alpha_{ME} = \frac{\Delta V_{ME}}{e \times \|\tilde{\mathbf{h}}\|} \quad (1.2)$$

## 1.2 Historique du phénomène magnéto-électrique

En 1894, P. Curie a imaginé l'existence d'un effet magnéto-électrique intrinsèque [Curie, 1894], en écrivant : "les conditions de symétrie nous permettent d'imaginer qu'un corps peut se polariser magnétiquement lorsque l'on le place dans un champ électrique". Le terme "magnéto-électrique" doit son origine à Debye en 1926. Cependant, cet effet n'a été observé expérimentalement que plusieurs années plus tard, par Dzyaloshinskii avec un échantillon d'oxyde de chrome en 1959 [Dzyaloshinskii, 1959].

### 1.2.1 Effet ME intrinsèque

La figure 1.2 illustre l'effet ME intrinsèque. Dans un matériau monphasé, le couplage intrinsèque entre l'état électrique et l'état magnétique est défini comme l'effet magnéto-électrique.

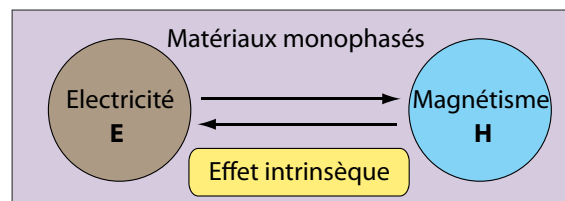


Figure 1.2 – *Effet magnéto-électrique intrinsèque*

Suite à la découverte du phénomène ME intrinsèque, la recherche s'est concentrée dans les années suivantes à découvrir d'autres matériaux présentant ce couplage. Cependant, les coefficients ME intrinsèques obtenus jusqu'à aujourd'hui restent faibles. En calculant la variation de l'énergie libre lorsque les champs magnétiques et électriques sont appliqués simultanément à un milieu ME, Brown *et al* [Brown *et al.*, 1968] [Fiebig, 2005] ont montré que le coefficient ME reste inférieur à la racine du produit de la susceptibilité magnétique et la susceptibilité électrique ( $\alpha_{ME} < \sqrt{\chi_m \chi_e}$ ). Cette étude a montré la nécessité d'utiliser un matériau présentant simultanément une forte perméabilité et une forte permittivité.

### 1.2.2 Effet ME extrinsèque

L'idée d'utiliser un effet ME extrinsèque apparaît une décennie avant la découverte expérimentale de l'effet intrinsèque [Tellegen, 1948] [Fiebig, 2005]. La combinaison de matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs permet d'obtenir un coefficient ME extrinsèque plus important que celui des matériaux monphasés [Nan *et al.*, 2008]. Cet effet ME est illustré par la figure 1.3 : l'application d'un champ magnétique génère une déformation mécanique sur les phases magnétostrictives. Cette déformation est transmise aux couches piézoélectriques dans lesquelles apparaît alors une polarisation électrique. Le coefficient magnéto-électrique est donc une propriété

provenant du produit des coefficients de couplage des matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs [Nan, 1994]. Dans la figure 1.3 les contraintes sont notées  $\mathbf{T}$ .

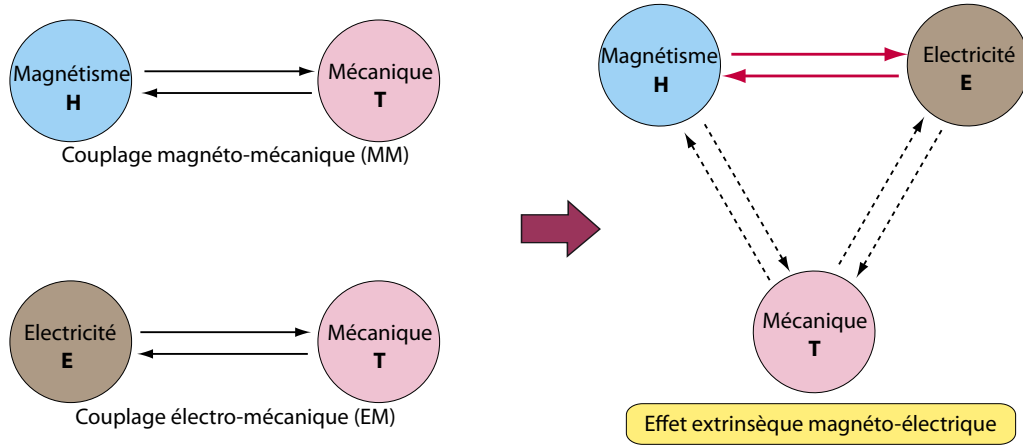


Figure 1.3 – *Effet magnéto-électrique extrinsèque*

Van Suchtelen *et al* [Suchtelen, 1972] sont les premiers à avoir observé l'effet ME extrinsèque dans des matériaux composites. L'échantillon considéré est un matériau piézoélectrique contenant des inclusions magnétostrictives (Figure 1.4). Malgré les efforts pour combiner des matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs possédant des coefficients de couplage élevés, le coefficient ME reste faible à température ambiante ( $0.13 \text{ V.cm}^{-1}.\text{Oe}^{-1}$ ). La figure 1.4 présente également une autre configuration possible sous forme de multicouche. Le multicouche permet d'atteindre des coefficients ME plus élevés que la structure à base d'inclusions. Il est aussi plus facile à fabriquer et pour un coût de fabrication moindre [Fiebig, 2005]. Cependant, l'anisotropie de cette structure multicouche peut poser problème pour certaines applications.

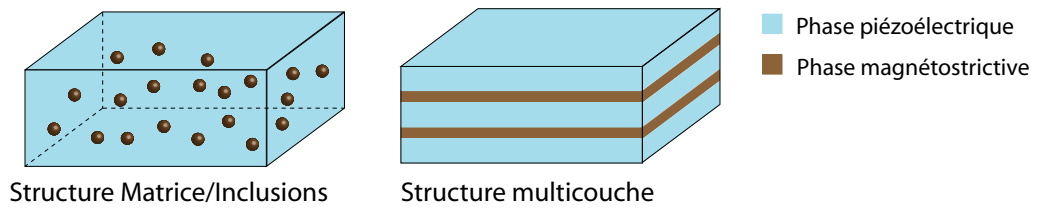


Figure 1.4 – *Structures ME composites*

Afin d'améliorer le coefficient ME, différentes associations de matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs ont été envisagées et différentes méthodes de fabrication ont été mises en place. Les premiers multicouches PZT/Terfenol-D ont permis d'atteindre un coefficient ME de  $0.1 \text{ V.cm}^{-1}.\text{Oe}^{-1}$  en régime statique. Les multicouches PZT/ $\text{NiFe}_2\text{O}_4$  possèdent un coefficient ME allant jusqu'à  $1.5 \text{ V cm}^{-1} \text{ Oe}^{-1}$

[Srinivasan *et al.*, 2001].

Le coefficient ME des multicouches dépend de différents paramètres :

- les coefficients de couplage de chaque constituant,
- la géométrie des couches et leur nombre,
- la méthode de collage.

Une autre méthode pour amplifier le coefficient ME est de travailler sous une excitation dynamique correspondant à la fréquence de résonance mécanique du dispositif. Cet effet de la fréquence sur l'effet ME a été observé expérimentalement par [Cai *et al.*, 2003] avec le relevé reporté sur la Figure 1.5 :

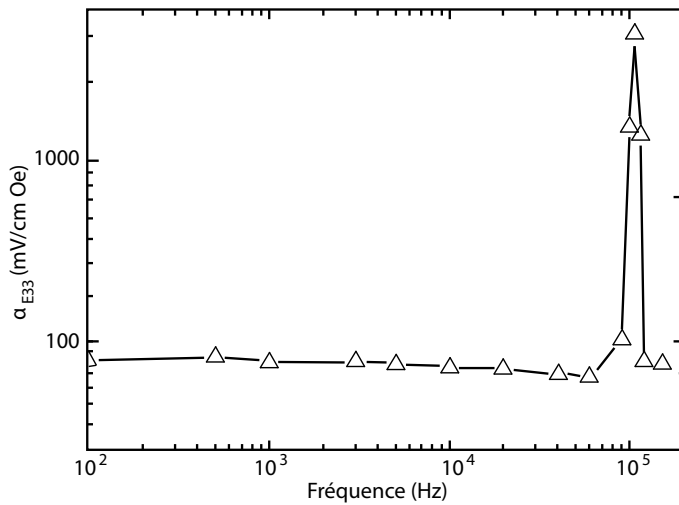


Figure 1.5 – Effet de résonance du coefficient ME en fonction de la fréquence pour une structure trilame

Les fréquences de résonance du couplage ME obtenues expérimentalement sont très proches des fréquences de résonance mécanique. Afin de profiter de cette propriété, les capteurs et actionneurs sont souvent placés sous excitation dynamique en plus d'une excitation statique de polarisation.

Si l'on compare les phénomènes ME intrinsèque et extrinsèque, les matériaux ME extrinsèques ont actuellement un coefficient de couplage plus important :  $\alpha = 36.7 ps.m^{-1}$  pour un effet intrinsèque obtenu par Rado *et al* [Rado *et al.*, 1984],  $\alpha > 720 ps.m^{-1}$  pour un effet extrinsèque [Fiebig, 2005] (note : l'unité  $ps.m^{-1}$  est précisée dans cette référence). Le travail présenté dans ce mémoire de thèse s'intéresse donc uniquement à la modélisation des matériaux ME composites.

### 1.2.3 Applications des matériaux ME composites

Depuis la réalisation de composites à fort couplage ME à température ambiante, les applications visant à utiliser l'effet ME sont de plus en plus nombreuses et variées : capteurs de mesure de champ magnétique statique et dynamique [Petrov *et al.*, 2007],

transducteur convertissant le champ micro-onde magnétique en champ micro-onde électrique [Bichurin *et al.*, 2002],... Les dispositifs qui peuvent être commandés par un courant ou un potentiel électrique sont des applications prometteuses d'utilisation des matériaux ME. En principe, les composites ME peuvent aussi être utilisés dans les dispositifs à mémoire en raison de leur comportement hystérétique [Bibes et Barthelemy, 2008].

La suite de cette section montre quelques unes des applications les plus courantes à base de matériaux ME composites : capteurs magnétiques statique et harmonique, inductance variable et transformateur ME.

### Capteur magnétique

Les capteurs de champ magnétique sont implantés dans de nombreux dispositifs électroniques qui nous entourent. Plusieurs types de capteurs sont actuellement commercialisés : capteur à effet Hall, capteur inductif, ... Un nouveau type de capteur de champ magnétique utilisant l'effet ME direct est proposé par plusieurs auteurs : un courant électrique ou un potentiel électrique sont obtenus sous l'action d'un champ magnétique. Grâce aux informations électriques obtenues, l'amplitude et la direction du champ magnétique appliqué sont susceptibles d'être détectées. Deux catégories de capteurs de champ magnétique sont présentées : statique et dynamique.

- **Capteur magnétique dynamique** : ce capteur basé sur l'effet ME est obtenu expérimentalement par un trilame ME présenté sur la figure 1.6 [Dong *et al.*, 2003]. Il permet de détecter un champ magnétique dynamique. Un tel capteur peut être utilisé dans les radars, dont le fonctionnement est parfois perturbés par des champs magnétiques qui les entourent. Le capteur de champ magnétique dynamique sert donc à détecter et à donner l'ordre de grandeur de ces champs de perturbation. Ce capteur offre une large gamme de détection du champ magnétique harmonique. Il est capable de mesurer des faibles champs de  $10^{-3}$  jusqu'à  $10^{-11}$  Tesla, la fréquence de travail étant comprise entre 1kHz et quelques centaines de kHz.

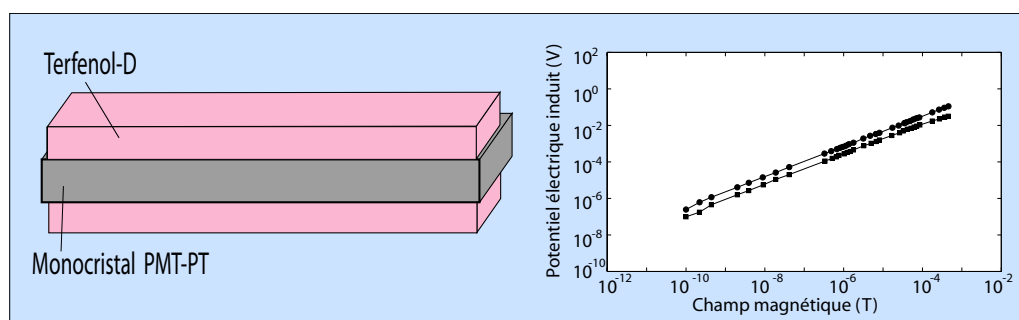


Figure 1.6 – Capteur magnétique dynamique [Dong *et al.*, 2003]

- **Capteur magnétique statique** : ce capteur est utilisé pour mesurer le champ magnétique terrestre, il fonctionne grâce à la non linéarité de la magnétostriction [Dong *et al.*, 2006]. A l'heure actuelle, il existe dans le commerce des

## 1. Effet magnéto-électrique

---

magnétomètres spatiaux, les flux gates, etc. Les composites ME offrent un autre type de capteur qui peut être composé par des lames magnétostrictives et piézoélectriques, plongées dans un champ magnétique dynamique calé sur la fréquence de résonance de sa structure mécanique. Sous l'effet de la fréquence de résonance, le coefficient ME est très amplifié, et donc la tension est plus facile à mesurer. La recherche de différentes configurations et matériaux permet d'améliorer la sensibilité et la gamme de champ magnétique détecté.

La figure 1.7 illustre un exemple de capteur magnétique statique proposé par C-S. Park *et al* [Park *et al.*, 2009].

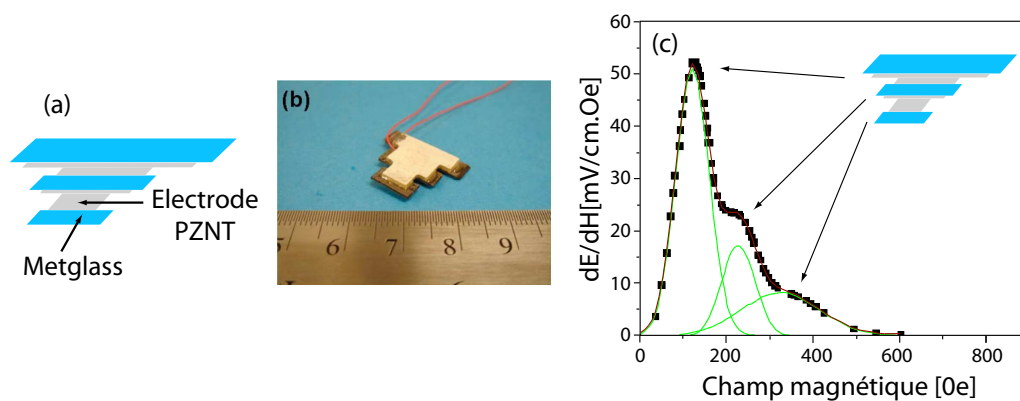


Figure 1.7 – Capteur magnétique statique [Park *et al.*, 2009]

Ce capteur consiste à combiner trois structures bilames ME. L'évolution de la tension en fonction du champ magnétique statique de ces structures est différente. La combinaison de ces trois sous structures peut créer une nouvelle courbe de tension en fonction du champ magnétique statique (présentée dans la figure 1.7). En modifiant la géométrie des structures bilames, la gamme de mesure peut être modifiée en fonction de celle de chaque sous structure.

### Inductance variable

Une autre application innovante de l'effet ME est une inductance variable, qui est l'un des composants les plus importants dans les circuits électroniques. Quelques points du fonctionnement des inductances variables sont à optimiser : la gamme de contrôle de la valeur de l'inductance, énergie consommée ou facteur de qualité. Le principe de l'inductance variable utilisant les matériaux ME est le suivant : le champ électrique de commande statique permet de déformer l'élément piézoélectrique. Le point de polarisation de l'élément magnétostrictif varie en fonction de la déformation transmise par l'élément piézoélectrique. Comme la perméabilité change en fonction du champ électrique appliqué, on obtient alors une inductance variable commandée par une tension.

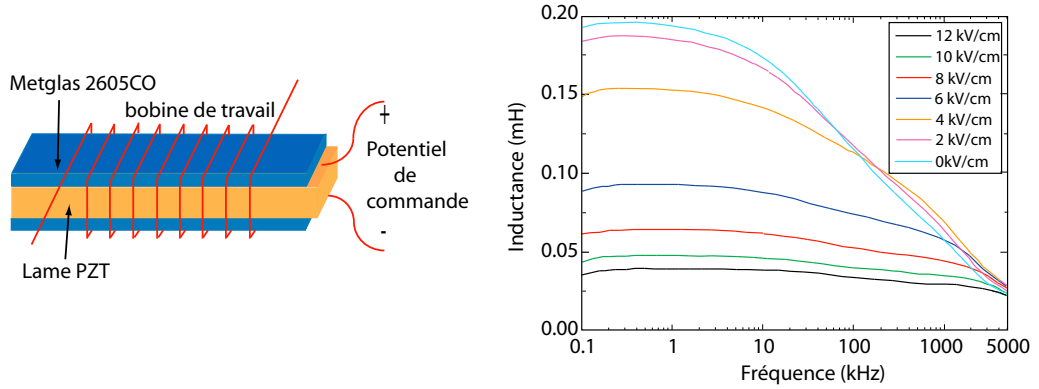


Figure 1.8 – Inductance variable [Lou et al., 2009]

La figure 1.8 présente une inductance variable proposée par J. Lou *et al* de type multicouche et basée sur le même principe que celle de X.Fang *et al* [Fang *et al.*, 2008].

### Transformateur magnéto-électrique

Le principe du transformateur magnéto-électrique consiste à envoyer un courant dynamique qui crée une tension dynamique à la sortie, c'est à dire au niveau des électrodes de l'élément piézoélectrique [Dong *et al.*, 2009]. A la fréquence de résonance, le coefficient ME atteint une valeur maximale qui correspond au maximum du rapport de conversion du transformateur. Un champ magnétique statique est ajouté par un courant statique pour changer le point de polarisation de l'élément magnétostrictif et permet de contrôler la tension de sortie. Un tel transformateur est présenté sur la figure 1.9 [Dong *et al.*, 2009] :

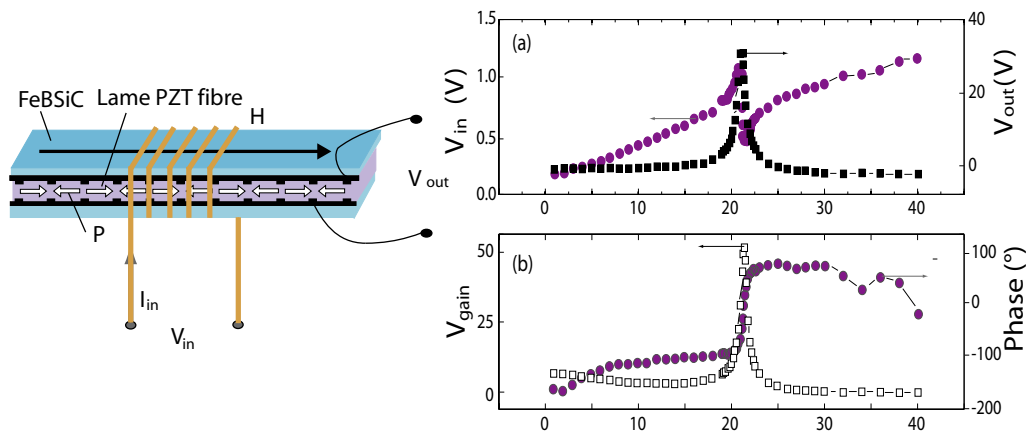


Figure 1.9 – Transformateur basé sur le principe de l'effet magnéto-électrique

Le transformateur magnéto-électrique et le capteur magnéto-électrique utilisent



tous les deux l'effet direct de la magnétostriction : le champ magnétique statique détermine le point de polarisation. Ces deux dispositifs fonctionnent grâce à la non-linéarité de la magnétostriction.

Ces systèmes (capteur de champ magnétique, inductance variable, transformateur, etc.) sont en cours de développement pour devenir des produits commerciaux innovants. Leur optimisation peut être facilitée à l'aide d'une modélisation qui permet de prédire les comportements, diminuant ainsi le coût des essais expérimentaux nécessaires. Il en découle une forte demande pour des modèles analytiques, numériques ou de schémas équivalents fiables pour étudier ces dispositifs.

## 1.3 Couplages MM et EM

### 1.3.1 Couplage magnéto-mécanique

Le couplage magnéto-mécanique dans les matériaux ferromagnétiques peut se manifester sous deux formes principales :

- **La déformation de magnétostriction** a été découverte par James Prescott Joule [Joule, 1847] qui a observé l'allongement d'un barreau de fer soumis à un champ magnétique. Deux types de magnétostriction peuvent être distingués : la magnétostriction de Joule et la magnétostriction volumique. A température ambiante, la déformation de magnétostriction volumique est négligeable. Cependant, elle peut devenir relativement importante pour des alliages dont la température est proche de la température de Curie, température à partir de laquelle l'alliage perd ses propriétés magnétiques [du Trémolet de Lacheisserie, 1993]. Lorsque l'on parlera de magnétostriction dans la suite, on se référera uniquement à la magnétostriction de Joule.
- **L'effet Villari** [Villari, 1865] est l'effet réciproque de la magnétostriction. L'aimantation d'un matériau ferromagnétique change lorsqu'il est soumis à une contrainte mécanique.

Tous les matériaux ferromagnétiques ont un couplage magnétostrictif plus ou moins important. Certains matériaux contenant des éléments de la famille des Terres Rares permettent d'avoir des coefficients magnétostrictifs élevés, on parle alors de magnétostriction géante. En particulier, le Terfenol-D dont la composition chimique est  $\text{Tb}_{0.3}\text{Dy}_{0.7}\text{Fe}_{1.9-1.95}$  présente des coefficients de couplage très élevées à température ambiante [Clark et Belson, 1972] [Engdahl, 2000]. La figure 1.10 représente les courbes d'aimantation et de magnétostriction du Terfenol-D obtenues expérimentalement par [Galopin, 2007] *et al.* Ces courbes sont fortement non-linéaires.

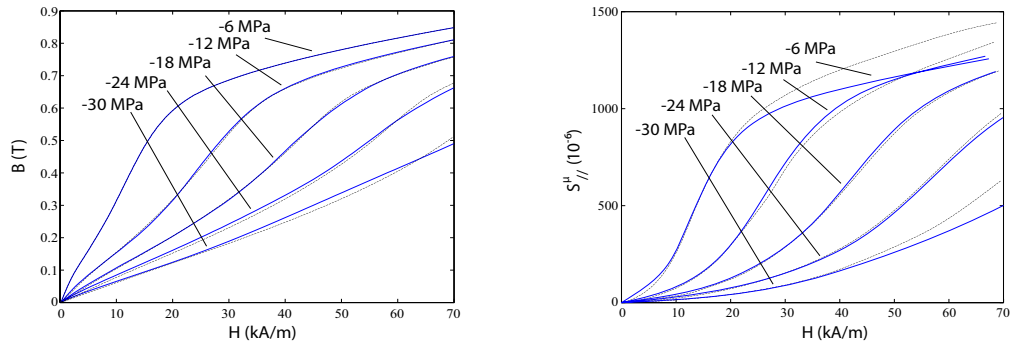


Figure 1.10 – Courbe d'aimantation et déformation de magnétostriction du Terfenol-D

Pour des excursions du champ magnétique, la loi de comportement peut être linéarisée autour d'un point de polarisation. On parle alors de loi de comportement piézomagnétique.

Une des premières applications des matériaux magnétostrictifs est le transducteur hydroacoustique [Murayama et Mizutani, 2002]. Des micromoteurs linéaires ou rotatifs utilisent des couches minces composées de matériaux à magnétostriction géante [Claeyssen *et al.*, 1997]. Les applications les plus courantes sont les capteurs et les actionneurs basés sur le couplage magnéto-élastique [Jiles et Lo, 2003], [Hristoforou et Ktena, 2007]. Le tableau 1.1 [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b] [Kellog *et al.*, 2003] [Kedous-Lebouc, 2006] présente les caractéristiques de différents matériaux magnétostrictifs.

Matériau	Déformation de magnétostriction à saturation ( $10^{-6}$ )	Induction magnétique à saturation (T)
Fer	21	2.16
Nickel	36	0.63
Cobalt	62	1.72
TbFe <sub>2</sub>	1750	1.1
Terfenol-D	1500	1
Galfenol	350	1.61

Tableau 1.1 – Caractéristiques de quelques matériaux magnétostrictifs : déformation de magnétostriction et induction magnétique à saturation

L'origine physique de l'effet magnétostrictif est liée au couplage entre l'état d'aimantation du matériau et les déformations du réseau cristallin.

### Processus d'aimantation

L'existence des directions de facile aimantation oriente des structures magnétiques en domaines en absence de champ magnétique extérieur [Cullity, 1972], [Bris-

## 1. Effet magnéto-électrique

---

sonneau, 1997]. La zone de transition entre deux domaines est appelée paroi, et l'aimantation y évolue progressivement [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a].

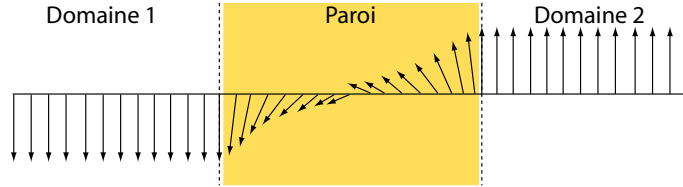


Figure 1.11 – *Domaines et paroi magnétique*

Sous l'effet du champ appliqué, le processus d'aimantation des monocristaux met en œuvre deux mécanismes : déplacement de parois et rotation de l'aimantation dans les domaines. En champ faible, le mécanisme de déplacement de parois est prépondérant. Lorsque le champ devient important, le mécanisme de rotation de l'aimantation intervient ([du Trémolet de Lacheisserie, 1999a]).

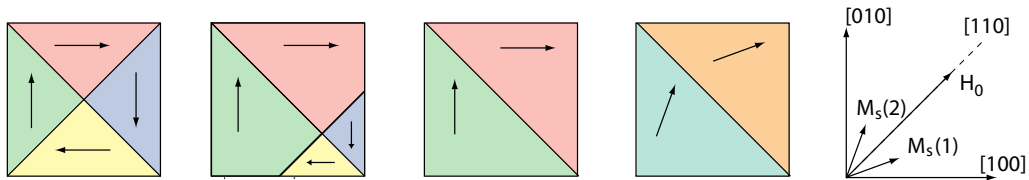


Figure 1.12 – *Processus d'aimantation d'un monocristal cubique [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a]*

Du point de vue macroscopique, le passage d'un échantillon sphérique et isotrope de l'état non-magnétique à l'état magnétique cause une variation de volume d'échantillon qui est très faible (la magnétostriction volumique). Lorsque l'échantillon est plongé dans un champ magnétique, la déformation se produit à volume constant (la magnétostriction de Joule). On distingue deux modes de déformation de magnétostriction : l'échantillon peut se contracter (magnétostriction négative) ou se dilater (magnétostriction positive) dans la direction d'application du champ (Figure 1.13)

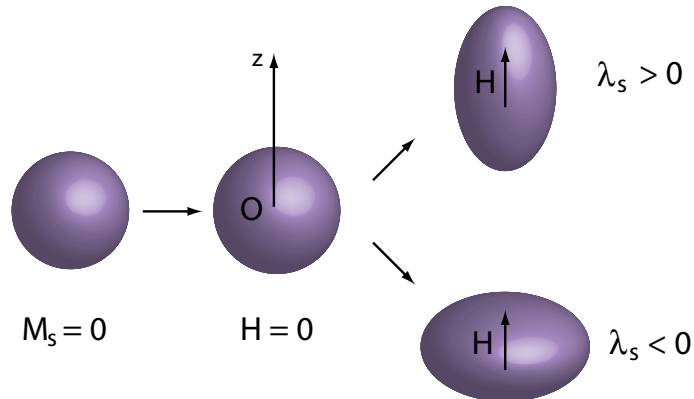


Figure 1.13 – Principaux modes de magnétostriction [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a]

### Effet de la contrainte sur l'aimantation

Initialement, les moments magnétiques d'un matériau magnétique sont distribués aléatoirement et de manière isotrope. L'application d'une contrainte mécanique sur un matériau magnétique déforme le matériau et modifie également sa perméabilité magnétique. Suivant son orientation, la contrainte appliquée favorise certaines directions de facile aimantation. La distribution des moments magnétiques devient alors anisotrope.

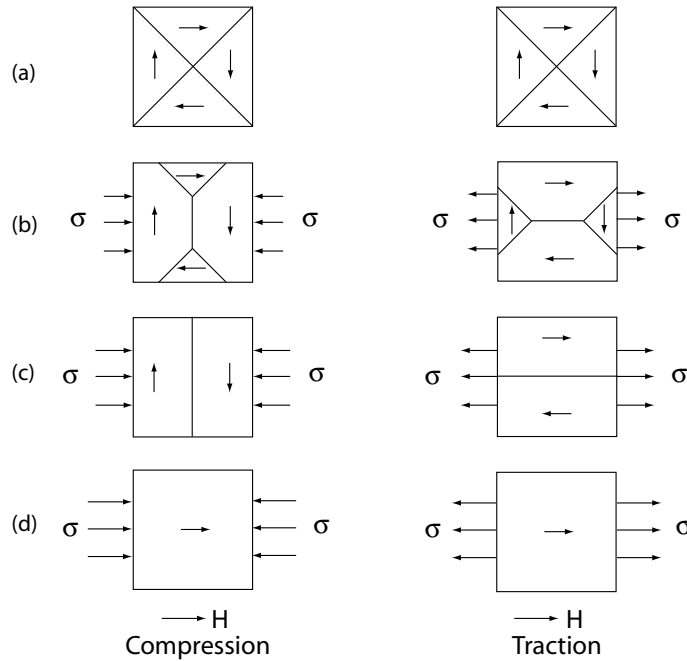


Figure 1.14 – Aimantation avec magnétostriction positive sous une contrainte mécanique uniaxiale [Cullity, 1972]

### 1.3.2 Couplage électro-mécanique

Le phénomène d'électrostriction est défini dans le sens général comme une déformation mécanique induite par un champ électrique. Ce phénomène apparaît dans tous les matériaux diélectriques. Le terme "électrostriction" se réfère souvent à un comportement quadratique. Il faut remarquer qu'il n'y a pas d'effet direct dans l'électrostriction, une contrainte n'entraînant pas de polarisation du matériau. La piézoélectricité est une propriété de certains matériaux diélectriques associée à la classe cristalline de la matière.

- **L'effet direct** a été découvert par P. Curie en 1880 [Curie et (1880a), 1880] [Curie et (1880b), 1880] : une polarisation électrique apparaît dans un matériau piézoélectrique lorsqu'il est soumis à une contrainte mécanique.
- **L'effet inverse** a été découvert par P. et J. Curie en 1880 [Curie et Curie, 1881] : un matériau piézoélectrique se déforme sous l'action d'un champ électrique.

D'après ces définitions des effets piézoélectriques direct et inverse, la définition du phénomène électrostriction inclut l'effet inverse de piézoélectricité. Cependant les mécanismes physiques des deux propriétés sont différents. L'origine physique de la piézoélectricité est liée à la structure cristalline du matériau qui n'a pas de centre de symétrie.

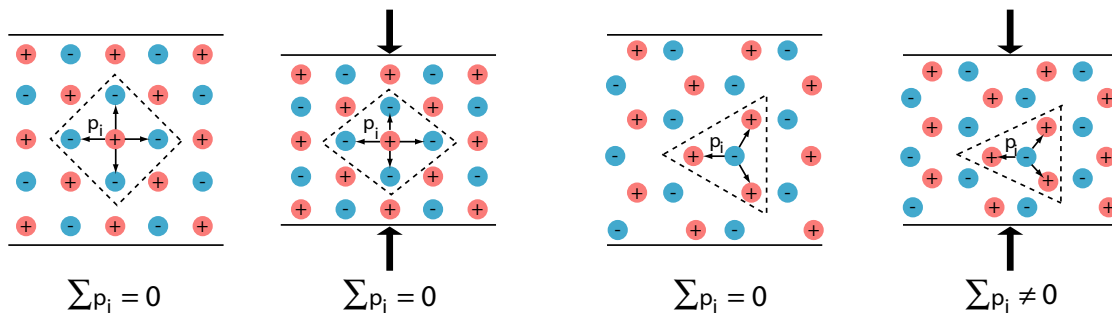


Figure 1.15 – *Origine microscopique de la piézoélectricité*

La figure 1.15 présente deux types de réseaux cristallins soumis à une contrainte mécanique. Le réseau de droite, qui n'est pas centrosymétrique, présente une séparation des charges positives et négatives lors de l'application d'une contrainte mécanique, ce qui conduit à la création de dipôles, donc une polarisation électrique. Ceci n'est pas le cas pour le réseau de gauche qui est centrosymétrique : l'application d'une contrainte ne crée pas de polarisation.

Parmi les matériaux piézoélectriques, on trouve les matériaux ferroélectriques comme les PZT (Titano-Zirconate de Plomb) qui présentent un couplage fort. Dans la pratique, les matériaux utilisés sont des matériaux de synthèse. Afin d'avoir un coefficient piézoélectrique élevé, les matériaux comme les PZT doivent subir un processus de polarisation au cours de la phase de fabrication pour créer un champ électrique rémanent dans le matériau [Heywang *et al.*, 2008]. La figure 1.16 présente le com-

portement classique non-linéaire du PZT. Si on fait une approximation en champ faible, la propriété piézoélectrique est classiquement considérée comme linéaire.

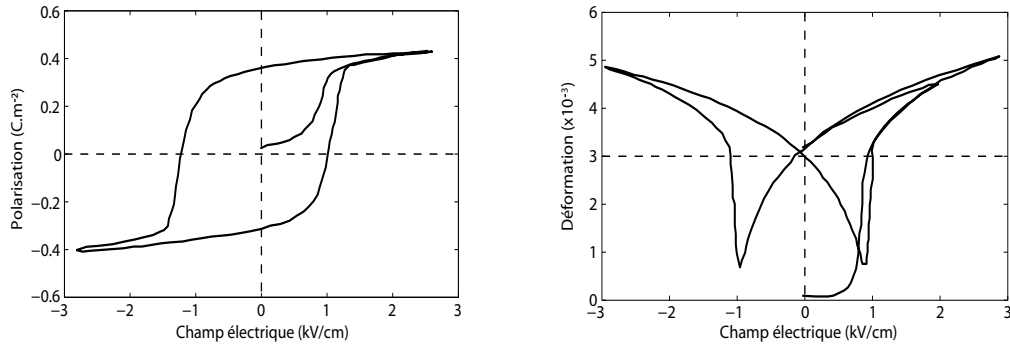


Figure 1.16 – Courbe d'aimantation et déformation d'un PZT [Heywang et al., 2008]

Les matériaux piézoélectriques sont utilisés dans diverses applications. Le quartz est utilisé pour les résonateurs piézoélectriques [Mindlin, 1952], [Parzen, 1983]. Les transducteurs acoustiques comme le microphone [Medill, 1953] utilisent les PZT. En outre, les moteurs [Koc et al., 2000] et transformateurs piézoélectriques [Crawford, 1961] sont intéressants par leur taille réduite. Le tableau 1.2 présente quelques matériaux piézoélectriques et leurs coefficients de couplage suivant différentes directions ( $d_{31}$ ,  $d_{33}$ ,  $d_{15}$ ) qui sont détaillées plus tard.

Matériau	$d_{31}$	$d_{33}$	$d_{15}$
Hexagonal			
ZnO	-5.0	12.4	-8.3
CdS	-5.2	10.3	-14.0
Tetragonal			
BaTiO <sub>3</sub>	-34.5	85.6	392
PbTiO <sub>3</sub>	-25	117	62
Céramique polarisé			
BaTiO <sub>3</sub>	-78	190	260
Pb(Zr,Ti)O <sub>3</sub>			
PZT-5H	-274	593	741
PZT-8	-27	225	330
K <sub>0.5</sub> Na <sub>0.5</sub> NbO <sub>3</sub>	-51	127	306

Tableau 1.2 – Propriétés de quelques matériaux piézoélectriques [Heywang et al., 2008]

### Processus de polarisation

Une étape importante pour l'utilisation des matériaux piézoélectriques est la pré-polarisation par un champ électrique. Dans un matériau ferroélectrique, si le champ

appliqué de pré-polarisation est faible, le phénomène dominant est dû à l'asymétrie du réseau cristallin du matériau, appelé phénomène piézoélectrique intrinsèque. Cependant, lorsque le champ appliqué devient plus important que le champ coercitif  $E_c$ , un autre phénomène piézoélectrique dit extrinsèque apparaît [Heywang *et al.*, 2008] et existe parallèlement avec le phénomène piézoélectrique intrinsèque. Un matériau ferroélectrique se compose de plusieurs domaines séparés par des parois, et une analogie peut être faite avec un matériau ferromagnétique. Chaque domaine se caractérise par une polarisation spontanée uniforme. Comme chaque direction de polarisation apparaît de façon aléatoire, la polarisation macroscopique est nulle. Si on applique un champ électrique, les domaines qui ont une orientation proche de l'orientation du champ externe vont croître en volume au détriment des autres domaines moins favorablement orientés. La rotation des domaines entraîne une déformation. Quand les directions de la polarisation et du champ électrique coïncident, le matériau est saturé et la déformation atteint son maximum. Si le champ électrique est supprimé, il reste une polarisation dite rémanente. C'est le processus de polarisation.

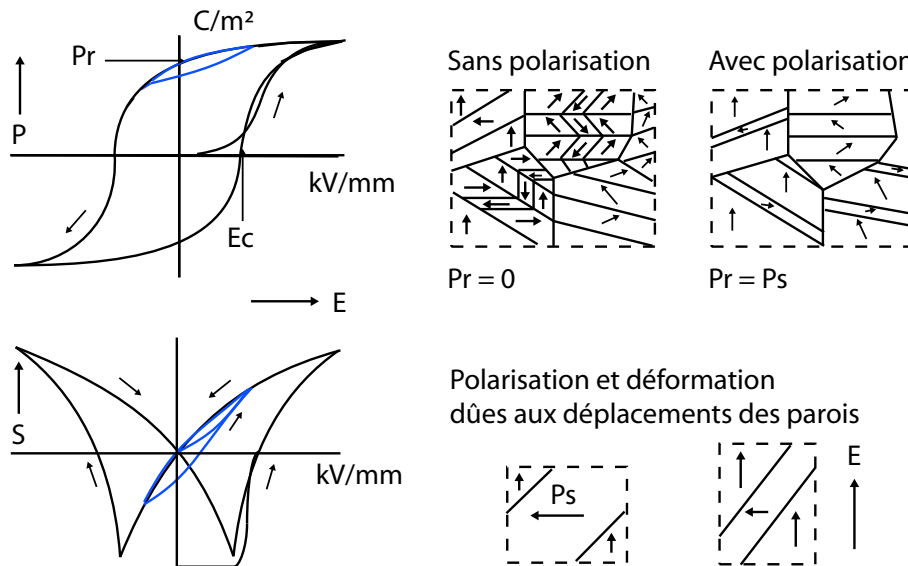


Figure 1.17 – *Processus de polarisation*

La figure 1.17 [Heywang *et al.*, 2008] présente le processus de polarisation pour un échantillon ferroélectrique. Si le champ appliqué est inférieur au champ coercitif  $E_c$ , l'évolution de la polarisation  $P$  et de la déformation  $S$  macroscopique suivent la courbe bleue. La figure 1.17 à droite présente les mouvements des domaines avant et après l'application du champ de pré-polarisation.

### Effet des contraintes sur la polarisation

L'application d'une contrainte sur un matériau piézoélectrique peut modifier la propriété électrique du matériau. L'application d'une contrainte risque de diminuer, voire supprimer la polarisation rémanente dans le matériau.

### 1.3.3 Comparaison entre les matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques

Les matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques sont les deux matériaux actifs les plus utilisés de nos jours. Le tableau 1.3 compare ces deux matériaux [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b], [Setter, 2002].

	Matériaux magnétostrictifs	Matériaux piézoélectriques
Mécanique	Déformations : 0.1-0.6% Forces : 500 - 5000N Bande passante : 0 - 50 kHz	Déformations : 0.1-0.6% Forces : 500 - 30000N Bande passante : 0 - GHz
Thermique	Température de Curie : $\approx 400^\circ$	Température de Curie : $\approx 300^\circ$
Energétique	Densités d'énergie : $\approx 200 \text{ kJ.m}^{-3}$ Consommations : Faible Commande : Champ magnétique $\approx 200 \text{ kA/m}$	Densités d'énergie : $\approx 1 \text{ kJ.m}^{-3}$ Consommations : Très faible Commande : Champ électrique 1 - 2 kV/m multicouches $\approx 200 \text{ V/m}$

Tableau 1.3 – Comparaison entre matériaux magnétostrictifs/piézoélectriques

### 1.3.4 Modélisation du phénomène ME

L'intérêt suscité autour de l'effet magnétoélectrique s'est intensifié rapidement durant les 40 dernières années. L'augmentation du nombre de publications dans ce domaine est impressionnante (présentée sur la figure 1.18).



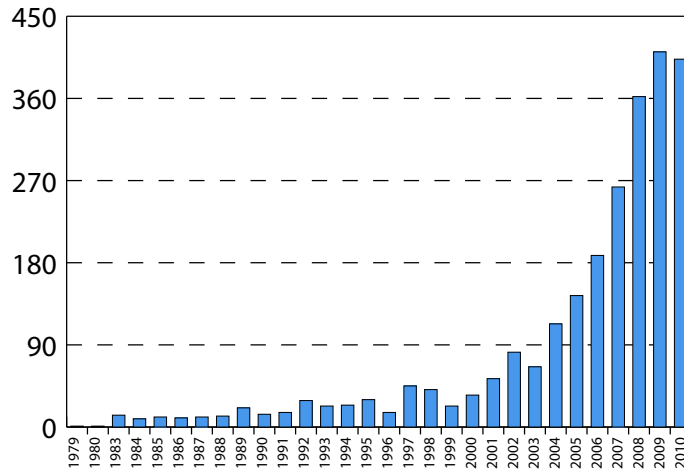


Figure 1.18 – *Nombre de publications sur l'effet magnéto-électrique*

Cependant, la modélisation numérique de cet effet tient une part relativement faible parmi ces publications. Les moyens informatiques actuels (capacité de mémoire, puissance des calculateurs, etc..) rendent la mise en œuvre des calculs numériques plus aisée. La modélisation doit permettre de diminuer les coûts d'essais de prototypage afin d'optimiser les performances des dispositifs. L'établissement de modèles numériques pertinents est alors crucial.

La modélisation de l'effet ME peut être abordée par une approche microscopique, basée généralement sur des calculs énergétiques à l'échelle des microstructures. L'approche macroscopique s'appuie sur les lois de comportement macroscopiques des matériaux et sur les équations d'équilibre des physiques considérés.

Le travail présenté dans ce mémoire s'intéresse à la modélisation de dispositifs basés sur l'effet ME, la démarche retenue pour la modélisation étant orientée vers une approche macroscopique.

Cependant, il existe actuellement très peu de modèles macroscopiques de l'effet ME. Il s'agit d'un modèle multi-physique complexe qui doit prendre en compte plusieurs caractéristiques du phénomène :

- les non-linéarités des couplages magnéto-mécanique.
- l'effet de la fréquence mécanique de la structure étudiée.
- le couplage électromagnétique par les équations de Maxwell sous excitation dynamique.

Notre objectif est donc de proposer un outil de modélisation numérique qui permet d'interpréter le fonctionnement des dispositifs à base des matériaux ME, pour ensuite optimiser leur structure.

Parmi les méthodes numériques macroscopiques, la méthode des éléments finis est une des méthodes de discrétisation adaptée aux problèmes ayant une géométrie complexe. Dans la littérature, pour chaque couplage considéré (magnéto-mécanique ou électro-mécanique), des travaux de recherches de modélisation par éléments finis existent déjà. Nous introduisons par la suite une brève présentation sur la méthode

des éléments finis et l'état de l'art de la modélisation des matériaux actifs.

Les problèmes physiques sont souvent décrits par des équations différentielles partielles (EDP). Le principe d'une méthode de discrétisation, comme la méthode des éléments finis, est de remplacer des EDP définies sur un domaine continu par un système d'équations discrètes de dimension finie. La résolution de ce système se fait par des méthodes numériques.

Il existe différentes méthodes éléments finis, basées sur différentes approches menant au système discrétisé. Par exemple, avec la méthode variationnelle, les EDP à résoudre sont issues généralement des fonctions énergétiques à minimiser. Une autre méthode, appelée méthode des résidus pondérés, s'appuie directement sur les équations d'équilibre et les conditions aux limites [Bastos et Sadowski, 2003]. Comme le problème de couplage est complexe, il est difficile d'obtenir pour notre étude un système discret par la méthode variationnelle. Nous avons donc choisi la méthode des résidus pondérés .

Il est important de noter l'existence de logiciels commerciaux de calcul éléments finis tels qu'ANSYS ou COMSOL. Ils offrent la possibilité de résoudre des problèmes linéaires de couplage électro-mécanique ou magnéto-mécanique. En revanche, le code source n'est pas disponible, ce qui empêche d'intervenir dans le code de ces logiciels. C'est alors un inconvénient majeur pour intégrer les lois de comportement non-linéaires associées à notre problème. Nous proposons dans ces travaux de développer un nouveau code éléments finis modélisant l'effet ME extrinsèque.

Dans la littérature, la modélisation par éléments finis sur le comportement électro-mécanique a fait l'objet de recherches de plusieurs groupes. Le travail de Piefort [Piefort, 2001] porte sur la modélisation des multicouches piézoélectriques en régimes statique et dynamique. Les variables d'état considérées sont la déformation et le champ électrique, et les lois de comportement sont supposées linéaires. La méthode variationnelle a été utilisée pour obtenir la formulation éléments finis. Le code a été appliqué sur un actionneur piézoélectrique.

Belahcen [Belahcen, 2004] a proposé de déterminer des lois de comportement à partir de l'énergie libre de Helmholtz. Le modèle a été appliqué au calcul de vibrations dans les machines électriques. Ce modèle a également été validé expérimentalement.

Le modèle d'Azoum [Azoum, 2005] est un modèle de couplage magnéto-mécanique en régime statique. Les lois de comportement sont non-linéaires. La déformation totale est décomposée en une déformation d'origine mécanique et une déformation de magnétostriction. La déformation de magnétostriction est modélisée par une fonction quadratique de l'induction magnétique.

Faisant suite à ces études, le modèle de Galopin [Galopin, 2007] est un modèle du couplage magnéto-électrique en régime statique. Afin d'alimenter le modèle avec des lois de comportement magnéto-élastiques pertinentes, une plate-forme de caractéri-

sation des matériaux magnétostrictifs a été développée. Le modèle a été appliqué sur un capteur de déplacement. Les résultats numériques ont été comparés aux résultats expérimentaux de Ueno *et al* [Ueno et Higuchi, 2005].

En utilisant un module piézoélectrique existant dans ANSYS, Liu *et al* [Y.X.Liu *et al.*, 2003b] ont étudié le comportement harmonique de l'effet ME. Dans une première approche, les lois de comportement de couplage électro-mécanique et magnéto-électrique sont supposées linéaires. Les variables d'état sont la déformation, le champ électrique et le champ magnétique. Les courants de Foucault sont négligés dans ce modèle. Liu *et al* ont obtenu des fréquences de résonance très proches des résonances mécaniques de la structure.

La superposition de deux champs magnétiques statique et dynamique permet d'avoir une tension plus importante aux électrodes collées sur l'élément piézoélectrique. De plus, la tension dépend du champ magnétique statique. Liu *et al* [Y.X.Liu *et al.*, 2003a] ont expliqué ce phénomène par la non-linéarité du couplage magnéto-électrique. Afin de prendre en compte ce comportement non-linéaire, une étape supplémentaire a été ajoutée dans le modèle précédent. Une courbe de la contrainte en fonction du champ magnétique statique a été obtenu expérimentalement. A chaque valeur du champ magnétique statique, Liu *et al* ont associé des coefficients de couplage qui ont ensuite été intégrés au modèle. Les tensions obtenues sont fonction du champ magnétique statique appliqué. Le modèle explique que la non-linéarité du couplage magnéto-mécanique est la raison pour laquelle la tension dynamique dépend du champ magnétique statique appliqué.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la définition et l'historique des effets intrinsèque et extrinsèque du phénomène magnéto-électrique ont été introduits. Les matériaux ME composites ont un grand potentiel en terme d'applications, qui nous permet de justifier le choix d'une modélisation des matériaux composites.

Jusqu'à nos jours, peu d'outils de modélisation numérique de l'effet ME existent. La complexité du modèle est la double non-linéarité du phénomène en régime dynamique : la non-linéarité de la magnétostriction (ou/et de la piézoélectricité) et de la courbe d'aimantation ainsi que l'effet de la fréquence en régime dynamique. Afin de simplifier le problème, la méthode proposée par la suite est de linéariser le comportement autour d'un point de fonctionnement. Le problème peut donc être divisé en deux sous-problèmes : la non-linéarité en régime statique et l'effet de la fréquence en régime dynamique supposé linéaire.

Le but de ce travail est de développer un modèle avec la méthode des éléments finis pour le couplage ME extrinsèque. Les lois de comportement couplées électro-magnétique ou magnéto-magnétique sont nécessaires au modèle présentées dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Modélisation du problème magnéto-électrique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Equations d'équilibre . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1.1	Problème électromagnétique . . . . .	25
2.1.2	Problème mécanique . . . . .	26
<b>2.2</b>	<b>Lois de comportement non couplé . . . . .</b>	<b>28</b>
2.2.1	Lois de comportement électromagnétique . . . . .	28
2.2.2	Loi de comportement mécanique . . . . .	29
<b>2.3</b>	<b>Loi de comportement magnéto-mécanique . . . . .</b>	<b>30</b>
2.3.1	Phénoménologie . . . . .	31
2.3.2	Loi de comportement du matériau magnétostrictif . . . . .	32
2.3.3	Loi de comportement piézomagnétique . . . . .	38
<b>2.4</b>	<b>Loi de comportement électro-mécanique . . . . .</b>	<b>42</b>
2.4.1	Phénoménologie . . . . .	42
2.4.2	Loi de comportement du matériau piézoélectrique . . . . .	42
2.4.3	Modèle linéaire piézoélectrique . . . . .	43
<b>2.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>43</b>

---



Ce chapitre introduit les équations d'équilibre électromagnétique et mécanique. Afin d'établir un outil de modélisation des matériaux actifs, il est indispensable de disposer des lois de comportement des matériaux. Ce chapitre se concentre sur la détermination de ces lois de comportement. Dans un premier temps, les lois de comportement non couplées sont introduites. Les lois de comportement couplées des matériaux actifs tels que les matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques, dont l'association conduit aux matériaux magnétoélectriques, sont ensuite présentées.

## 2.1 Equations d'équilibre

Dans cette partie, nous rappelons les équations d'équilibre électromagnétique et mécanique ainsi que les conditions de passage associées.

### 2.1.1 Problème électromagnétique

#### Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre électromagnétique sont les équations de Maxwell. Maxwell a regroupé les théorèmes d'Ampère, de Gauss, de Thomson et de Faraday sous la forme d'équation différentielle qui sont la base de l'électromagnétisme [Maxwell, 1885a], [Maxwell, 1885b].

Les équations de Maxwell permettent de définir les états électrique et magnétique qui ne sont pas indépendants l'un de l'autre en régime variable :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

où  $\rho$  est la densité de charge volumique et  $\mathbf{J}$  la densité de courant.

Les grandeurs vectorielles  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  représentent respectivement le champ électrique, l'induction électrique, le champ magnétique et l'induction magnétique.

Les opérations sur les vecteurs ( $\operatorname{div}$ ,  $\operatorname{grad}$ ) sont détaillées dans l'annexe A.

Le théorème de Faraday découle de l'équation (2.2) : le champ électrique dépend de la variation temporelle de l'induction magnétique.

L'équation (2.4) permet de retrouver le théorème d'Ampère : la circulation du champ magnétique le long d'un circuit fermé est égale à la somme des courants qui traversent la surface définie par le circuit orienté.

D'après les équations de Maxwell, on peut déduire une relation locale de conservation du courant :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

S'il n'y a pas d'accumulation de charge,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Le courant de conduction dans ce cas est conservé.

L'équation (2.3) permet de définir un potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a} \quad (2.6)$$

L'équation (2.2) permet d'introduire un potentiel scalaire électrique  $V$  :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Dans ce chapitre, les variables d'état électromagnétique considérées sont  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$ . Les équations (2.6) et (2.7) permettent alors de se ramener au potentiel scalaire électrique  $V$  et au potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  comme inconnues du problème à résoudre.

### Conditions de passage

Les grandeurs électromagnétiques peuvent être discontinues lors du passage d'un milieu à un autre. En considérant deux milieux différents  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , avec  $\Gamma$  la surface frontière entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal orienté du milieu  $\Omega_1$  vers le milieu  $\Omega_2$ , les relations de passage sont

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} &= \rho_s & (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} &= 0 & (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} &= \mathbf{J}_s \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $\rho_s$  et  $\mathbf{J}_s$  sont respectivement la charge surfacique et le courant surfacique entre les deux milieux. Les relations (2.8) indiquent la continuité de la composante normale de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et de la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  entre deux milieux.

### 2.1.2 Problème mécanique

#### Equation d'équilibre

En mécanique, l'équation d'équilibre dans un milieu continu s'écrit :

$$\text{div } \mathbb{T} + \mathbf{f} = \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

où  $\mathbb{T}$  est le tenseur d'ordre 2 des contraintes,  $\mathbf{f}$  les forces volumiques,  $\rho_m$  la masse volumique,  $\mathbf{u}$  le vecteur déplacement mécanique (annexe A).

Sous l'hypothèse de petites déformations, dans une base orthonormée, la déformation  $\mathbb{S}$  peut s'écrire en fonction du déplacement  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^t \mathbf{u}) = \mathbb{D}(\mathbf{u}) \quad (2.10)$$

avec  $\mathbb{S}$  le tenseur d'ordre 2 des déformations,  $\mathbb{D}$  l'opérateur symétrique de dérivation sur le vecteur  $\mathbf{u}$ , qui conduit à un tenseur défini par :

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Il est possible d'utiliser les notations de Voigt. En notant  $\mathbf{T}$  la contrainte et  $\mathbf{S}$  la déformation :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= [t_{11} \quad t_{22} \quad t_{33} \quad t_{23} \quad t_{31} \quad t_{12}]^t \\ \mathbf{S} &= [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad 2s_{23} \quad 2s_{31} \quad 2s_{12}]^t \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'équation (2.10) devient alors :

$$\mathbf{S} = \mathcal{D}\mathbf{u} \quad (2.13)$$

où l'opérateur  $\mathcal{D}$  est défini par :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Dans la suite de l'étude, la notation de Voigt sera retenue plutôt que les calculs directs à partir des tenseurs  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{S}$ .

### Conditions aux limites

En considérant deux milieux différents  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  connectés par une surface de frontière  $\Gamma$ , avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal orienté du milieu  $\Omega_1$  vers le milieu  $\Omega_2$ , les conditions aux limites mécaniques s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{f}_s \\ (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec  $\mathbf{f}_s$  la force surfacique sur  $\Gamma$ .

Les relations (2.15) indiquent la continuité de la composante normale de la contrainte  $\mathbf{T}$  et de la composante tangentielle de la déformation  $\mathbf{S}$  entre deux milieux.



## 2.2 Lois de comportement non couplé

### 2.2.1 Lois de comportement électromagnétique

Les lois de comportement électromagnétique d'un matériau s'écrivent de manière générale :

$$\mathbf{B} = \mathbb{\mu}\mathbf{H} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{D} = \mathbb{\epsilon}\mathbf{E} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{J} = \mathbb{\sigma}\mathbf{E} \quad (2.18)$$

où  $\mathbb{\mu}$ ,  $\mathbb{\epsilon}$  et  $\mathbb{\sigma}$  sont respectivement les matrices de perméabilité magnétique, permittivité diélectrique et conductivité électrique du matériau.

Les matériaux utilisés dans le cadre de la thèse ont des lois de comportement couplées, la permittivité et la perméabilité dépendent alors de l'état de contrainte. En l'absence de contrainte appliquée, la matrice de permittivité  $\mathbb{\epsilon}$  des matériaux est considérée constante :

$$\mathbb{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice de perméabilité  $\mathbb{\mu}$  est aussi une matrice (3,3) dans le cas général :

$$\mathbb{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Les matériaux magnétostrictifs considérés dans ce travail ont un comportement magnétique non-linéaire : la matrice de perméabilité n'est pas constante et dépend de l'état magnétique  $\mathbf{B}$  et de l'état mécanique  $\mathbf{S}$ .

En général, les matériaux piézoélectriques sont des matériaux céramiques non conducteurs, alors que les matériaux magnétostrictifs sont souvent des conducteurs électriques. La matrice de conductivité des matériaux magnétostrictifs dans le cas isotrope se ramène à :

$$\mathbb{\sigma} = \sigma \mathbb{I} \quad (2.21)$$

où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité. Dans ce cas, la conductivité est caractérisée par un scalaire  $\sigma$ .

### Effet de la fréquence d'excitation

Lorsqu'un matériau est soumis à un champ magnétique dynamique dans un plan donné, l'équation (2.2) montre qu'il y a un champ électrique suivant la direction perpendiculaire à ce plan. Dans le cas où le matériau est un conducteur électrique (cas des matériaux magnétostrictifs), la loi de comportement (2.18) indique qu'il existe alors un courant circulant dans la direction perpendiculaire au plan. Ce courant est appelé courant de Foucault [Fink et Christiansen, 1989].

La profondeur de pénétration de ce courant dans le matériau correspond à l'épaisseur de peau, qui dépend de la fréquence de travail, de la perméabilité et de la conductivité  $\sigma$  du matériau. Dans le cas où la conductivité du matériau est isotrope et le comportement magnétique est linéaire, la profondeur de pénétration s'exprime par :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2.22)$$

où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation [rad/s]. Si l'épaisseur du conducteur est plus importante que l'épaisseur de pénétration, la distribution de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  ne se fait plus dans la totalité de la surface du conducteur. Cet effet se rencontre lorsque la fréquence de travail est suffisamment élevée.

### 2.2.2 Loi de comportement mécanique

La loi de comportement mécanique dans le cas de l'élasticité linéaire s'appelle la loi de Hooke. Le tenseur de contraintes s'exprime en fonction du tenseur des déformations par :

$$\mathbb{T} = \mathbb{c} : \mathbb{S} \quad (2.23)$$

où  $\mathbb{c}$  est le tenseur d'ordre 4 d'élasticité,  $:$  est le produit doublement contracté. La gamme des déformations considérée dans le cadre de ce travail reste toujours sous la limite élastique des matériaux.

Le tenseur de contraintes possède des symétries ( $c_{ijkl} = c_{klij}$ , et  $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}$ ). Dans le cas orthotrope, le tenseur  $\mathbb{c}$  peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke peut s'exprimer en utilisant les coefficients de Lamé  $\mu^*$  et  $\lambda^*$  :

$$\mathbb{T} = 2\mu^*\mathbb{S} + \lambda^*tr(\mathbb{S})\mathbb{I} \quad (2.25)$$

avec  $tr$  la trace du tenseur.

En utilisant la notation de Voigt, le tenseur d'élasticité peut alors s'écrire :

$$\mathbb{c} = \begin{pmatrix} \lambda^* + 2\mu^* & \lambda^* & \lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^* & \lambda^* + 2\mu^* & \lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^* & \lambda^* & \lambda^* + 2\mu^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

## 2. Modélisation du problème magnéto-électrique

---

Après avoir introduit les lois de comportement non couplé, les lois de comportement des matériaux actifs sont présentées dans la partie suivante. La loi de comportement des matériaux composites magnéto-électriques peut être considérée comme une combinaison des lois de comportement des matériaux magnétostrictif et piézoélectrique. La possible non-linéarité de ces deux lois doit pouvoir être prise en compte.

Le schéma 2.1 résume les différents couplages présents dans un composite magnéto-électrique.

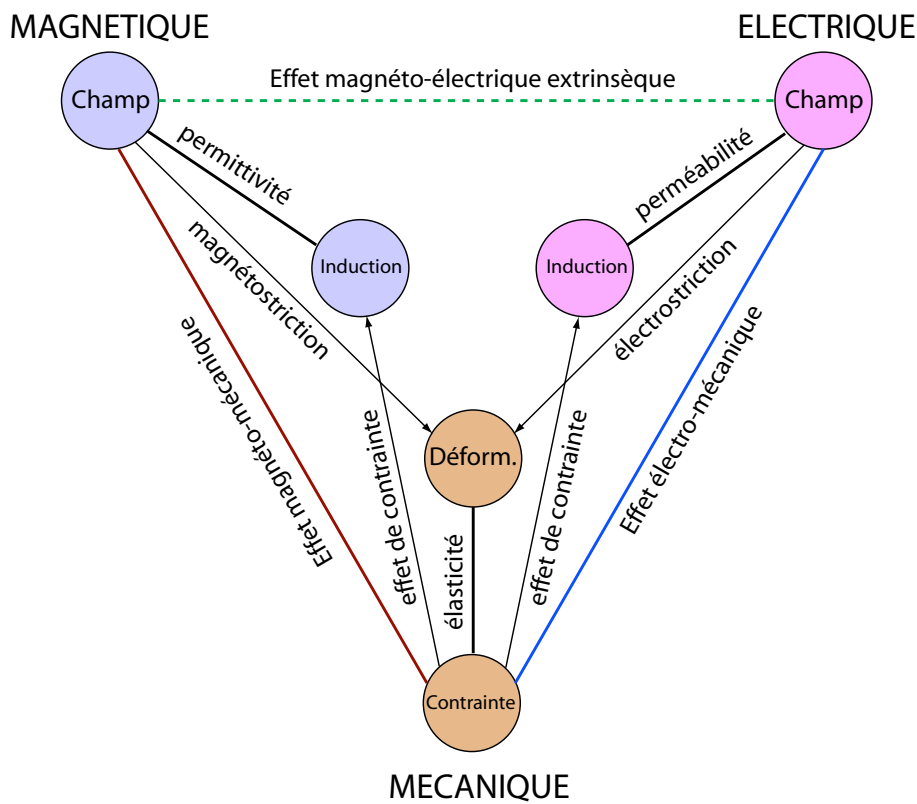


Figure 2.1 – *Couplage magnéto-électrique extrinsèque*

### 2.3 Loi de comportement magnéto-mécanique

Dans cette partie, les lois de comportement magnéto-mécanique sont présentées. Deux modèles non-linéaires de déformation de magnétostriction sont considérés : un modèle quadratique en fonction de l'induction magnétique et un modèle quadratique en fonction de l'aimantation.

### 2.3.1 Phénoménologie

Les résultats expérimentaux donnant la déformation de magnétostriction sur pour échantillon magnétostrictif permettent de mettre en évidence une relation non-linéaire entre les propriétés magnétiques et mécaniques. La figure 2.2 présente par exemple la courbe de magnétostriction du FeCo obtenue au laboratoire LMNT au Vietnam.

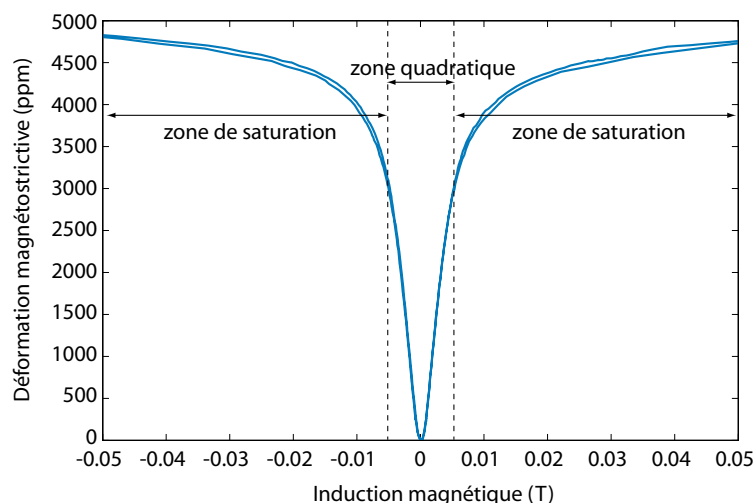


Figure 2.2 – La déformation à contrainte nulle d'échantillon FeCo

L'évolution de la déformation en fonction de l'induction magnétique montre deux propriétés importantes :

- La saturation de la déformation : à partir d'une certaine valeur de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , la déformation ne varie quasiment plus.
- La relation mathématique caractérisant la déformation en fonction de l'induction magnétique est une relation paire. Dans une première approche, on pourra l'approximer à l'aide d'un polynôme de deuxième ordre.

La loi de comportement de magnétostriction proposée par Azoum *et al* [Azoum, 2005] utilise une relation quadratique entre la déformation mécanique et l'induction magnétique. Cette loi de comportement s'applique dans le cas où l'induction magnétique n'atteint pas la saturation. La figure 2.2 met en évidence l'impossibilité d'approximer la relation entre la déformation et l'induction magnétique par une simple relation quadratique sur toute la gamme d'induction.

La loi de comportement magnétostrictif proposée dans ce chapitre est basée sur le travail d'Azoum, mais en considérant une relation entre la déformation et l'aimantation. On suppose que l'aimantation est parallèle à l'induction magnétique, cette hypothèse étant notamment vérifiée pour un matériau isotrope en l'absence de contraintes. La relation entre la déformation et l'aimantation est alors supposée quadratique. Cette modification nous permet de considérer la saturation lorsque l'induction magnétique atteint des valeurs élevées.

### 2.3.2 Loi de comportement du matériau magnétostrictif

Les variables d'état dans le travail d'Azoum [Azoum, 2005] sont l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et la déformation  $\mathbb{S}$ . Comme on le verra par la suite, ce choix permet de faciliter la résolution numérique qui considère le potentiel vecteur magnétique et les déplacements comme inconnue.

L'étude énergétique présentée ci-après considère les variables d'état  $\mathbf{B}$  et  $\mathbb{S}$ . Elle permet d'étudier des lois de comportement couplé.

#### Etude énergétique

Pour un matériau magnétostrictif, le travail total  $\mathcal{W}$  inclut le travail magnétique et le travail mécanique, lors de variations élémentaires  $d\mathbf{B}$  et  $d\mathbb{S}$ , et s'écrit :

$$d\mathcal{W} = h_i db_i + t_{ij} ds_{ij} \quad (2.27)$$

où  $h_i$  et  $b_i$  dénotent respectivement la composante  $i$  du champ magnétique  $\mathbf{H}$  et de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ ,  $t_{ij}$  et  $s_{ij}$  les composantes  $ij$  du tenseur des contraintes  $\mathbb{T}$  et de déformations  $\mathbb{S}$ . A partir de l'expression (2.27), le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et le tenseur des contraintes  $\mathbb{T}$  sont calculés en dérivant le travail total :

$$\begin{aligned} h_i &= \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial b_i} \right|_{\mathbb{S}} \\ t_{ij} &= \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s_{ij}} \right|_{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Comme le travail total est une fonction de classe  $\mathbb{C}^2$ , les dérivées croisées partielles secondes sont continues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_m}{\partial s_{ij}} &= \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial b_m \partial s_{ij}} \\ \frac{\partial t_{ij}}{\partial b_m} &= \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial s_{ij} \partial b_m} \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'après le théorème de Schwarz, on en déduit l'égalité :

$$q_{mij} = \frac{\partial h_m}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial b_m} \quad (2.30)$$

où le terme  $q$  caractérise le couplage magnéto-mécanique. A partir de l'intégration de l'équation (2.29), on peut écrire la loi de comportement magnéto-mécanique pour les variables d'état choisies  $\mathbf{B}$  et  $\mathbb{S}$  :

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}) &= h_i^0(\mathbf{B}, \mathbb{0}) + \int_0^{s_{kl}} q_{ikl}|_{\mathbf{B}} ds_{kl} \\ t_{ij}(\mathbf{B}, \mathbb{S}) &= t_{ij}(\mathbf{0}, \mathbb{S}) + \int_0^{b_k} q_{kij}|_{\mathbb{S}} db_k \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dans cette équation, le terme  $h_i^0(\mathbf{B}, \mathbb{0})$  doit s'obtenir en considérant une déformation nulle, ce qui n'est pas facile à mettre en place d'un point de vue expérimental [Galopin *et al.*, 2008].

### Loi de comportement mécanique

La déformation totale  $\mathbb{S}$  peut se décomposer en deux parties : une déformation élastique  $\mathbb{S}^e$ , due aux contraintes mécaniques, et une déformation de magnétostriction  $\mathbb{S}^\mu$  [Hirsinger et Billardon, 1995]. Dans la suite, la déformation de magnétostriction  $\mathbb{S}^\mu$  est supposée dépendre uniquement du champ magnétique appliqué. Par ailleurs,  $\mathbb{S}^e$  ne dépend pas de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^e + \mathbb{S}^\mu \quad (2.32)$$

D'après la loi de Hooke, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$t_{ij} = C_{ijkl}(s_{kl} - s_{kl}^\mu) = C_{ijkl}s_{kl} - t_{ij}^\mu \quad (2.33)$$

La décomposition de la déformation totale nous facilite le calcul d'intégrale de l'équation (2.31).

### Loi de comportement magnétique

Le terme  $h_i(\mathbf{B}, 0)$  peut être modifié afin de se ramener à un calcul à contrainte nulle, c'est à dire pour lequel  $\mathbb{S} = \mathbb{S}^\mu$ . A contrainte nulle, l'équation (2.31) devient :

$$h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu) = h_i(\mathbf{B}, 0) + \int_0^{s_{kl}^\mu} q_{ikl}|_{\mathbf{B}} ds_{kl} \quad (2.34)$$

On en déduit :

$$h_i(\mathbf{B}, 0) = h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu) - \int_0^{s_{kl}^\mu} q_{ikl}|_{\mathbf{B}} ds_{kl} \quad (2.35)$$

En remplaçant (2.35) dans l'équation (2.31), on obtient une nouvelle forme de la loi de comportement est obtenue :

$$h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu) + \int_{s_{kl}^\mu}^{s_{kl}} q_{ikl}|_{\mathbf{B}} ds_{kl} \quad (2.36)$$

Comme  $\mathbb{S}^e$  ne dépend pas de  $\mathbf{B}$  :

$$q_{ijk} = \frac{\partial t_{jk}}{\partial b_i} = -\frac{\partial t_{jk}^\mu}{\partial b_i} \quad (2.37)$$

On obtient :

$$h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu) - \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} (s_{kl} - s_{kl}^\mu) \quad (2.38)$$

où  $h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu)$  est le champ magnétique obtenu pour une induction  $\mathbf{B}$  et une contrainte nulle. En l'absence de contrainte appliquée,  $h_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu)$  peut s'exprimer en fonction de la reluctivité du matériau et de l'induction appliquée.

En regroupant les équations mécanique (2.33) et magnétique (2.38), on peut définir la loi de comportement magnéto-élastique :

### Loi de comportement de magnétostriction

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijkl}s_{kl} - t_{ij}^\mu \\ h_i &= \nu_{ij}b_j - \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i}(s_{kl} - s_{kl}^\mu) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Afin de calculer la matrice de couplage  $\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i}$ , il faut connaître la relation entre la déformation de magnétostriction  $\mathbf{S}^\mu$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Dans cette étude deux relations sont proposées, une relation quadratique entre la déformation de magnétostriction  $\mathbf{S}^\mu$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , et une relation quadratique entre  $\mathbf{S}^\mu$  et l'aimantation  $\mathbf{M}$ .

### Modèle quadratique de l'induction magnétique

Un échantillon magnétostrictif se déforme sous l'influence d'une induction magnétique  $\mathbf{B}$ . On cherche à obtenir une expression de la déformation due à  $\mathbf{B}$  dans un référentiel lié à échantillon.

On définit une repère local lié à l'orientation de l'induction magnétique ( $\mathbf{b}_\parallel$ ,  $\mathbf{b}_{\perp 1}$ ,  $\mathbf{b}_{\perp 2}$ ),  $\mathbf{b}_\parallel$  étant parallèle à l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{b}_{\perp 1}$  et  $\mathbf{b}_{\perp 2}$  sont deux directions perpendiculaires à  $\mathbf{b}_\parallel$ .

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- la déformation de magnétostriction est isochore.
- le matériau est isotrope.

Pour un matériau isotrope qui est soumis à une contrainte uniaxiale  $t_{11}$  suivant l'axe  $\mathbf{b}_\parallel$ , la déformation élastique  $\mathbf{S}^e$  s'écrit :

$$\mathbf{S}^e = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu t_{11} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

où  $E$  et  $\nu$  représentent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Le modèle quadratique magnétostrictif dans le repère de l'induction magnétique ( $\mathbf{b}_\parallel$ ,  $\mathbf{b}_{\perp 1}$ ,  $\mathbf{b}_{\perp 2}$ ) proposé est [Hirsinger, 1994], [Delaere, 2002] :

$$\mathbf{S}^\mu = \begin{bmatrix} s_{11}^\mu & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & s_{33}^\mu \end{bmatrix} = \beta_0 \mathbf{B}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Par changement de repère de l'induction magnétique ( $\mathbf{b}_\parallel$ ,  $\mathbf{b}_{\perp 1}$ ,  $\mathbf{b}_{\perp 2}$ ) dans la base du matériau (1, 2, 3), le tenseur de déformation de magnétostriction dans le repère du

matériau s'écrit :

$$\mathbb{S}^\mu = \beta_0 \begin{bmatrix} b_1^2 - \frac{b_2^2 + b_3^2}{2} & \frac{3}{2}b_1b_2 & \frac{3}{2}b_1b_3 \\ \frac{3}{2}b_2b_1 & b_2^2 - \frac{b_1^2 + b_3^2}{2} & \frac{3}{2}b_2b_3 \\ \frac{3}{2}b_3b_1 & \frac{3}{2}b_3b_2 & b_3^2 - \frac{b_1^2 + b_2^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

où  $(b_1, b_2, b_3)$  sont les coordonnées de  $\mathbf{B}$  dans le repère de l'échantillon (1, 2, 3). La forme indicielle associée est :

$$s_{kl}^\mu = \frac{\beta_0}{2} (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2) \quad (2.43)$$

où  $\delta_{kl}$  est le symbole de Kronecker.

### Modèle quadratique de l'aimantation

L'hypothèse supplémentaire dans ce modèle est que l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et l'aimantation  $\mathbf{M}$  sont colinéaires. La déformation de magnétostriction s'écrit dans ce cas :

$$s_{kl}^\mu = \frac{\beta_0}{2\mu_0^2} (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2) \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2} \quad (2.44)$$

### Intégration des modèles de déformation de magnétostriction dans la loi de comportement

La loi de comportement mécanique dans le cas d'un matériau isotrope peut s'écrire à l'aide des coefficients de Lamé.  $\mu^*$  est le module de cisaillement et  $\lambda^*$  module de compressibilité :

$$t_{ij} = 2\mu^* s_{ij} + \delta_{ij} \lambda^* \text{tr}(\mathbb{S}) \quad (2.45)$$

Si on utilise cette expression (2.45) dans le cas où la déformation de magnétostriction est à volume constant ( $\text{tr}(\mathbb{S}^\mu) = 0$ ), la contrainte équivalente  $\mathbb{T}^\mu$  peut se calculer à partir du champ magnétique appliqué dans les deux cas précisés précédemment en utilisant la décomposition (2.32) :

– Modèle quadratique de l'induction magnétique :

$$t_{ij}^\mu = 2\mu^* s_{ij}^\mu = \mu^* \beta_0 (3b_i b_j - \delta_{ij} \|\mathbf{B}\|^2) \quad (2.46)$$

– Modèle quadratique de l'aimantation :

$$t_{ij}^\mu = 2\mu^* s_{ij}^\mu = \frac{\mu^* \beta_0}{\mu_0^2} (3b_i b_j - \delta_{ij} \|\mathbf{B}\|^2) \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2} \quad (2.47)$$



## 2. Modélisation du problème magnéto-électrique

---

Les coefficients de couplage  $q_{ikl} = \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i}$  dépendent des états mécanique et électrique à travers des variables d'état  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{B}$ . Le calcul de ces coefficients est explicité dans les deux modèles de déformation de magnétostriction comme suit :

– Modèle en  $\mathbf{B}^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} &= \mu^* \beta_0 \frac{\partial (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2)}{\partial b_i} \\ \text{et } \frac{\partial (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2)}{\partial b_i} &= -2\delta_{kl} b_i + 3\delta_{ik} b_l + 3\delta_{il} b_k \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'expression (2.48) permet d'exprimer le terme de couplage  $\mathbf{H}^\mu = \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} (s_{kl} - s_{kl}^\mu)$  sous une forme matricielle classique :

$$\mathbf{H}^\mu = 2\beta_0 \mu^* \boldsymbol{\nu}^\mu \mathbf{B} \quad (2.49)$$

où la réluctivité équivalente  $\boldsymbol{\nu}^\mu$  est :

$$\begin{bmatrix} s_{11}^e + \text{tr}(\mathbf{S}^e) & 3s_{12}^e & 3s_{13}^e \\ 3s_{21}^e & s_{22}^e + \text{tr}(\mathbf{S}^e) & 3s_{23}^e \\ 3s_{31}^e & 3s_{32}^e & s_{33}^e + \text{tr}(\mathbf{S}^e) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

– Modèle en  $\mathbf{M}^2$  : le terme de couplage  $\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i}$  est dans ce cas plus compliqué à calculer. Il demande d'exprimer la relation entre l'aimantation et l'induction magnétique.

$$\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} = \frac{\mu^* \beta_0}{\mu_0^2} \left[ \frac{\partial (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2)}{\partial b_i} \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2} + (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2) \frac{\partial \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial b_i} \right] \quad (2.51)$$

avec

$$\frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial b_i} = \frac{b_i}{\|\mathbf{B}\|} \quad (2.52)$$

**NOTA BENE : Démonstration de l'équation (2.52)**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \\ \frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial b_i} &= \frac{\partial \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}{\partial b_i} = \frac{2b_i}{2\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{b_i}{\|\mathbf{B}\|} \end{aligned}$$

### Courbe d'aimantation

Pour calculer  $\Psi = \frac{\partial \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2}}{\partial \|\mathbf{B}\|}$  dans l'équation (2.51), il faut connaître une relation entre l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et l'aimantation magnétique  $\mathbf{M}$ . La courbe d'aimantation présente l'induction magnétique  $B$  en fonction du champ magnétique  $H$ . Il existe des modèles analytiques et numériques pour décrire ce comportement. Par exemple, la courbe obtenue expérimentalement peut s'approximer par des polynômes. Pour notre étude, on utilise dans le cas isotrope la relation de type Langevin [Bozorth, 1951], [Daniel *et al.*, 2008] :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\| &= \mu_0(\|\mathbf{H}\| + \|\mathbf{M}\|) \\ \|\mathbf{B}\| &= \mu_0 \left[ \|\mathbf{H}\| + M_s \left( \frac{1}{\tanh\left(\frac{3\chi_0 \|\mathbf{H}\|}{M_s}\right)} - \frac{M_s}{3\chi_0 \|\mathbf{H}\|} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

où  $\mu_0$  désigne la perméabilité du vide,  $M_s$  l'aimantation à saturation et  $\chi_0$  la susceptibilité magnétique initiale (à champ nul) du matériau. Cette expression permet d'obtenir les courbes de la figure 2.3 à partir de ces deux derniers paramètres.

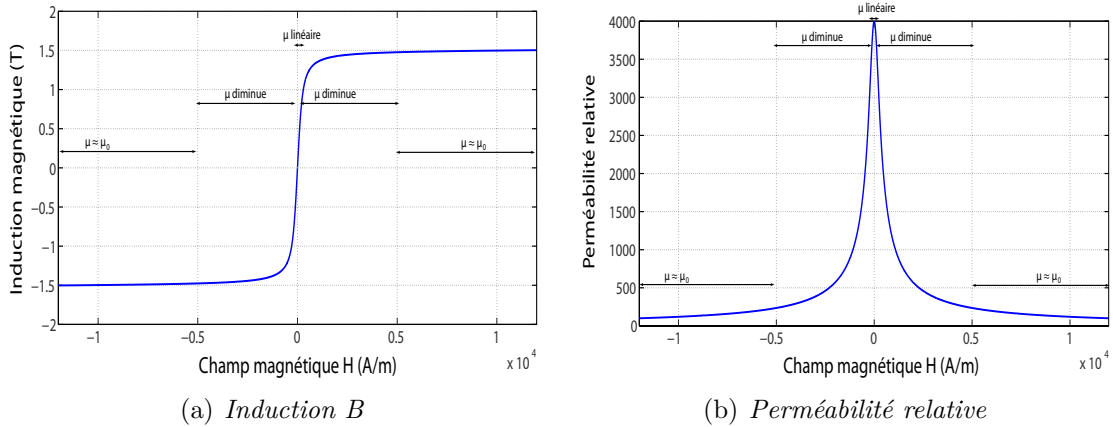


Figure 2.3 – Courbe d'aimantation : Induction magnétique en fonction de champ magnétique

L'équation (2.53) illustrée par un exemple avec la figure 2.3 propose une relation entre l'induction magnétique et le champ magnétique non-linéaire. Elle peut être divisée en trois parties : une partie supposée linéaire caractérisée par une perméabilité  $\mu = \frac{\partial B}{\partial H}$  constante. Une deuxième partie associée à une diminution de la valeur de  $\mu$  qui ensuite tend vers  $\mu_0$  dans une troisième partie. L'expression (2.53) peut alors être intégrée dans le calcul de l'équation (2.51). La méthode numérique est

préférable pour ce calcul d'intégrale.

#### NOTA BENE : Calcul analytique de $\Psi$

La fonction  $\|\mathbf{B}\|$  de  $\|\mathbf{H}\|$  anhystérétique est une fonction continue et bijective :

$$\Psi = \frac{\partial \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2}}{\partial \|\mathbf{B}\|} = \frac{\partial \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2}}{\partial \|\mathbf{H}\|} \frac{1}{\frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial \|\mathbf{H}\|}} \quad (2.54)$$

L'équation (2.53) s'écrit :

$$\|\mathbf{B}\| = \mu_0 \|\mathbf{H}\| + \mu_0 M_s \coth \left( \frac{3\mu_0 \chi_0 \|\mathbf{H}\|}{M_s} \right) - \mu_0 \frac{M_s^2}{3\mu_0 \chi_0 \|\mathbf{H}\|} \quad (2.55)$$

Les dérivées de l'équation (2.54) peuvent se calculer comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial \|\mathbf{H}\|} &= \mu_0 + 3\mu_0^2 \chi_0 \left( 1 - \coth^2 \left( \frac{3\mu_0 \chi_0}{M_s} \|\mathbf{H}\| \right) \right) + \frac{M_s^2}{3\chi_0} \frac{1}{\|\mathbf{H}\|^2} \\ \frac{\partial \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2}}{\partial \|\mathbf{H}\|} &= 2 \|\mathbf{H}\| \frac{\left( \frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{H}\|} - \frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial \|\mathbf{H}\|} \right)}{\|\mathbf{B}\|^2} \left( \frac{\|\mathbf{H}\|}{\|\mathbf{B}\|} - \frac{1}{\mu_0} \right) \end{aligned}$$

La loi de comportement de magnétostriction proposée auparavant permet de modéliser des structures à base de matériaux magnétostrictifs en régime statique. Notre modèle vise aussi des applications pour lesquelles un champ magnétique statique et un champ harmonique sont appliqués simultanément. Dans ce cas, le problème est divisé en deux sous problèmes : Une partie statique détermine le point de polarisation. Ensuite autour du point de polarisation, un signal harmonique est ajouté. Il est ainsi nécessaire d'étudier une loi de comportement linéarisée dite loi de comportement piézomagnétique. La linéarisation de loi de comportement est illustrée sur la figure 2.4.

### 2.3.3 Loi de comportement piézomagnétique

Nous cherchons ici une loi de comportement utilisable pour des petites variations autour d'un point de polarisation. La loi de comportement de magnétostriction autour d'un point de fonctionnement se fait par calcul différentiel à partir de l'équation (2.39).

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij} &= C_{ijkl}^{ms} \tilde{s}_{kl} - \frac{\partial t_{ij}^\mu}{\partial b_k} \tilde{b}_k \\ \tilde{h}_i &= -\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \tilde{s}_{kl} + \left[ \frac{\partial \nu_{ik} b_k}{\partial b_j} - \frac{\partial^2 t_{kl}^\mu}{\partial b_i \partial b_j} (s_{kl} - s_{kl}^\mu) + \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \frac{\partial s_{kl}^\mu}{\partial b_j} \right] \tilde{b}_j \end{aligned} \quad (2.56)$$

où  $\widetilde{X}$  désigne une petite variation autour  $X_0$ . Par définition, on a :

$$\widetilde{X} = \frac{\partial X}{\partial a}(a_0, b_0)\widetilde{a} + \frac{\partial X}{\partial b}(a_0, b_0)\widetilde{b} \quad X = X_0 + \widetilde{X} \quad (2.57)$$

L'équation (2.56) introduit les termes à calculer :

- Le terme  $\frac{\partial t_{ij}^\mu}{\partial b_k}$  correspond à la matrice de couplage  $\mathfrak{q}$  déjà mentionnée, voir équation (2.48) pour le cas du modèle en  $\mathbf{B}^2$  et l'équation (2.51) pour le cas du modèle en  $\mathbf{M}^2$ .
- Le terme  $\frac{\partial \nu_{ik} b_k}{\partial b_j}$  donne la matrice de reluctivité équivalente  $\widetilde{\nu}$
- Les termes  $-\frac{\partial^2 t_{kl}^\mu}{\partial b_i \partial b_j}(s_{kl} - s_{kl}^\mu)$  et  $\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \frac{\partial s_{kl}^\mu}{\partial b_j}$  sont deux termes supplémentaires qui peuvent contribuer à la reluctivité apparente du matériau en régime dynamique.

### Réductivité équivalente

Autour d'un point de fonctionnement, la reluctivité  $\widetilde{\nu}$  n'est pas la même que la reluctivité initiale.

$$\frac{\partial \nu_{ik} b_k}{\partial b_j} = \nu_{ij} + \frac{\partial \nu_{ii}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{b_i b_j}{\|\mathbf{B}\|} \quad (2.58)$$

L'expression (2.58) introduit des termes extra-diagonaux que l'on ne peut pas négliger.

#### NOTA BENE : Démonstration de l'équation (2.58)

$$\frac{\partial \nu_{ik} b_k}{\partial b_j} = \nu_{ik} \frac{\partial b_k}{\partial b_j} + \frac{\partial \nu_{ik}}{\partial b_j} b_k$$

La matrice de perméabilité initiale est une matrice diagonale ( $\nu_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ), à partir de l'équation (2.52), on en déduit :

$$\begin{aligned} \nu_{ik} \frac{\partial b_k}{\partial b_j} &= \nu_{ij} \\ \frac{\partial \nu_{ik}}{\partial b_j} b_k &= \frac{\partial \nu_{ik}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial b_j} b_k = \frac{\partial \nu_{ik}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{b_j}{\|\mathbf{B}\|} b_k = \frac{\partial \nu_{ii}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{b_i b_j}{\|\mathbf{B}\|} \end{aligned}$$

### Autres termes contribuant à la réluctivité dans le modèle en $\mathbf{B}^2$

- Le premier terme supplémentaire est  $\nu_{ij}^* = -\frac{\partial^2 t_{kl}^\mu}{\partial b_i \partial b_j} (s_{kl} - s_{kl}^\mu)$ . En calculant la dérivée de l'équation (2.46), on a :

$$\begin{aligned}\nu_{ij}^* &= \mu^* \beta_0 \frac{\partial^2 (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2)}{\partial b_i \partial b_j} (s_{kl} - s_{kl}^\mu) \\ &= 2\mu^* \beta_0 (3s_{ij}^e - \delta_{ij} \text{tr}(\mathbb{S}^e))\end{aligned}\tag{2.59}$$

#### NOTA BENE : Calcul de $\nu_{ij}^*$

$$\frac{\partial^2 (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2)}{\partial b_i \partial b_j} (s_{kl} - s_{kl}^\mu) = \frac{\partial^2 3b_k b_l}{\partial b_i \partial b_j} s_{kl}^e - \frac{\partial^2 \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2}{\partial b_i \partial b_j} s_{kl}^e$$

On a  $\frac{\partial^2 b_k b_l}{\partial b_i \partial b_j} \neq 0$  si et seulement si  $(k = i \text{ et } l = j)$  et  $(k = j \text{ et } l = i)$ , d'où :

$$\frac{\partial^2 b_k b_l}{\partial b_i \partial b_j} s_{kl}^e = 2s_{ij}^e$$

Comme  $\delta_{kl} = 1$  si  $k = l$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2}{\partial b_i \partial b_j} s_{kl}^e &= \frac{\partial^2 \|\mathbf{B}\|^2}{\partial b_i \partial b_j} \text{tr}(\mathbb{S}^e) \\ &= 2\delta_{ij} \text{tr}(\mathbb{S}^e)\end{aligned}$$

- Le deuxième terme à calculer est  $\nu_{ij}^{**} = \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \frac{\partial s_{kl}^\mu}{\partial b_j}$ .

A partir de l'équation (2.46), on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \frac{\partial s_{kl}^\mu}{\partial b_j} &= \mu^* \beta_0 \frac{\partial (3b_k b_l - \delta_{kl} b_p b_p)}{\partial b_i} \frac{\partial (3b_k b_l - \delta_{kl} b_p b_p)}{\partial b_j} \\ &= \mu^* \beta_0 \Lambda_{ij}\end{aligned}\tag{2.60}$$

Le terme  $\Lambda$  peut être calculé facilement et le résultat obtenu est alors :

$$\Lambda_{ij} = 6b_i b_j + 18\delta_{ij} b_i^2\tag{2.61}$$

**NOTA BENE : Démonstration l'équation (2.61)**

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij} &= (-2\delta_{kl}b_i + 3\delta_{ik}b_k + 3\delta_{il}b_l)(-2\delta_{kl}b_j + 3\delta_{jk}b_k + 3\delta_{jl}b_l) \\ &= 4\delta_{kl}^2b_ib_j - 6\delta_{ik}\delta_{kl}b_kb_j - 6\delta_{il}\delta_{kl}b_lb_j - \\ &\quad 6\delta_{kl}\delta_{jk}b_ib_k + 9\delta_{ik}\delta_{jk}b_k^2 + 9\delta_{il}\delta_{jk}b_kb_l - \\ &\quad 6\delta_{kl}\delta_{jl}b_ib_l + 9\delta_{ik}\delta_{jl}b_kb_l + 9\delta_{il}\delta_{jl}b_l^2\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}4\delta_{kl}^2b_ib_j &= 12b_ib_j & 6\delta_{ik}\delta_{kl}b_kb_j &= 6b_ib_j \\ 9\delta_{ik}\delta_{jk}b_kb_l &= 9b_ib_j & 9\delta_{ik}\delta_{jk}b_k^2 &= 9\delta_{ij}b_j^2\end{aligned}$$

D'où :

$$\Lambda_{ij} = 6b_ib_j + 18\delta_{ij}b_j^2$$

**Réductivité supplémentaire dans le modèle en  $M^2$** 

Les deux termes supplémentaires de réductivité peuvent être calculés à l'aide de l'équation (2.59) et de l'équation (2.61). Comme le calcul associé à la courbe d'aimantation est numérique, ces deux termes supplémentaires sont calculés numériquement aussi.

**Modèle équivalent**

Après tous les calculs des termes de l'équation (2.56), on peut écrire la loi linéarisée de magnétostriction sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} & -\tilde{\mathbf{q}}^t \\ -\tilde{\mathbf{q}} & \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}} \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{c}}$  caractérise les propriétés mécaniques,  $\tilde{\mathbf{q}}$  le couplage magnéto-mécanique et  $\tilde{\mathbf{v}}$  les propriétés magnétiques. Ces matrices dépendent du point de fonctionnement. Pour calculer les matrices  $\tilde{\mathbf{c}}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$ , on doit connaître le point de fonctionnement considéré. Un code statique non-linéaire pour calculer ces valeurs est alors nécessaire.

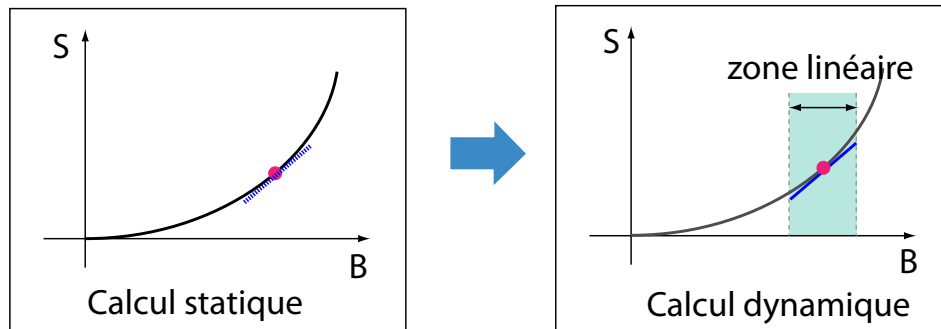


Figure 2.4 – Processus de calcul dans le cas harmonique

La figure 2.4 illustre le processus de linéarisation. Dans certains cas, des constructeurs donnent directement les coefficients autour d'un point de fonctionnement, dans ce cas, le problème devient un problème linéaire simple.

### Généralisation du modèle de déformation de magnétostriction

Le modèle proposé est un modèle quadratique de l'aimantation. On peut généraliser le développement des équations dans le cas où la relation entre la déformation de magnétostriction et l'aimantation n'est pas quadratique. La méthode est d'approximer la relation entre la déformation de magnétostriction et l'aimantation par un polynôme de degré supérieur, et ensuite de l'intégrer dans le modèle en suivant la même démarche que précédemment.

## 2.4 Loi de comportement électro-mécanique

### 2.4.1 Phénoménologie

La loi de comportement électro-mécanique est en général non-linéaire. Cependant, les capteurs et actionneurs fonctionnent souvent autour d'un point de fonctionnement et la gamme d'utilisation est petite. Par conséquent, quand on parle de la loi de comportement piézoélectrique, dans le cadre de ce travail, il s'agit d'une loi de comportement linéaire. Dans le cas non linéaire, une loi de comportement d'électrostriction est proposée dans l'annexe B.

### 2.4.2 Loi de comportement du matériau piézoélectrique

Les variables d'état choisies sont la déformation  $\mathbf{S}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$ . Si l'on néglige le travail thermique et magnétique, le travail total implique le travail électrique et mécanique, lors de variations élémentaires  $d\mathbf{B}$  et  $d\mathbf{S}$ , s'écrit :

$$d\mathcal{W} = -d_i de_i + t_{ij} ds_{ij} \quad (2.63)$$

L'induction électrique et la contrainte mécanique peuvent être calculées en dérivant le travail total donné par l'équation (2.63) :

$$\begin{aligned} d_i &= - \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial e_i} \right|_{\mathbf{S}} \\ t_{ij} &= \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s_{ij}} \right|_{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Si avec le même raisonnement que dans le cas magnéto-mécanique, la fonction d'énergie est une fonction de classe  $C^2$ , et les dérivées partielles croisées vérifient le théorème de Schwartz. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_m}{\partial s_{ij}} &= - \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial e_m \partial s_{ij}} \\ \frac{\partial t_{ij}}{\partial e_m} &= \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial s_{ij} \partial e_m} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Le coefficient de couplage électromécanique est défini par :

$$\alpha_{mij} = \frac{\partial d_m}{\partial s_{ij}} = -\frac{\partial t_{ij}}{\partial e_m} \quad (2.66)$$

La loi de comportement piézoélectrique pour les variables d'état choisies  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{E}$  est introduite comme suit :

$$\begin{aligned} d_i(\mathbf{E}, \mathbf{S}) &= d_i^0(\mathbf{E}, \mathbf{0}) + \int_0^{s_{kl}} \alpha_{ikl}|_{\mathbf{E}} ds_{kl} \\ t_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{S}) &= t_{ij}(\mathbf{E}, \mathbf{0}) - \int_0^{e_k} \alpha_{kij}|_{\mathbf{S}} de_k \end{aligned} \quad (2.67)$$

### 2.4.3 Modèle linéaire piézoélectrique

Si un modèle linéaire est considéré, les coefficients peuvent être définis comme suit :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial s_{kl}} & \alpha_{ijk} &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial e_k} \\ \alpha_{ijk} &= \frac{\partial d_i}{\partial s_{jk}} & \epsilon_{ij} &= \frac{\partial d_i}{\partial e_j} \end{aligned} \quad (2.68)$$

où  $C_{ijkl}$  est le tenseur de rigidité,  $\alpha_{ijk}$  le coefficient de couplage piézoélectrique et  $\epsilon_{ij}$  la permittivité du matériau.

A un point de polarisation du matériau magnétostrictif, les lois de comportement piézoélectrique et magnétostrictif en régime harmonique petits signaux peuvent être regroupées pour obtenir une loi de comportement couplé magnéto-électro-mécanique, qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{e}^t & -\mathbf{q}^t \\ \mathbf{e} & \epsilon & 0 \\ -\mathbf{q} & 0 & \nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Pour les matériaux magnétostrictifs, le tenseur de couplage électro-mécanique est nul ( $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ).

Pour les matériaux piézoélectriques, le tenseur de couplage magnéto-mécanique est nul ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ).

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations d'équilibre mécanique et électromagnétique ont été introduites. Les lois de comportement mécanique, magnétique et électrique non couplés ont été présentées, ainsi que les lois de comportement des matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques. Les deux types de matériaux ont en général un comportement non-linéaire. Un modèle quadratique de l'induction magnétique et



## 2. Modélisation du problème magnéto-électrique

---

un modèle quadratique de l'aimantation ont été introduits pour la déformation de magnétostriction. Dans le cas des matériaux piézoélectriques, la loi de comportement est supposée linéaire.

Le but du chapitre suivant est d'intégrer ces lois de comportement dans une modélisation basée sur la méthode des éléments finis.

# Chapitre 3

## Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modèle bidimensionnel . . . . .</b>	<b>47</b>
3.1.1	Loi de comportement pour le problème 2D . . . . .	47
3.1.2	Hypothèses du problème mécanique . . . . .	48
3.1.3	Hypothèses du problème électromagnétique . . . . .	49
<b>3.2</b>	<b>Problème couplé électro-magnéto-mécanique . . . . .</b>	<b>52</b>
3.2.1	Méthode de Galerkin . . . . .	52
3.2.2	Formulation mécanique . . . . .	54
3.2.3	Formulation électrique . . . . .	57
3.2.4	Formulation magnétique . . . . .	57
<b>3.3</b>	<b>Structures élémentaires : bilame et trilame . . . . .</b>	<b>59</b>
3.3.1	Modèle 2D complet . . . . .	66
3.3.2	Comparaisons . . . . .	70
<b>3.4</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>72</b>

---



Le chapitre précédent a présenté les lois de comportement non-linéaire des matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'établissement de la formulation linéaire par éléments finis pour le couplage magnéto-électrique extrinsèque.

Le modèle par éléments finis développé est bidimensionnel, ce qui entraîne que certaines hypothèses doivent être prises en considération. En considérant les lois de comportement précédemment présentées et des hypothèses 2D, la formulation par éléments finis est mise en place à partir des équations d'équilibre du chapitre 2.

La suite de ce chapitre introduit les hypothèses en considération, le modèle bidimensionnel pourra être résolu en déterminant les inconnues : le déplacement  $\mathbf{u}$  dans le plan travail, le potentiel scalaire électrique  $V$  et la composante suivant  $z$  du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$ .

Les matériaux magnétostrictifs sont supposés polarisés autour d'un point de fonctionnement, c'est donc la loi de comportement linéarisée qui est utilisée.

## 3.1 Modèle bidimensionnel

L'établissement d'un modèle numérique bidimensionnel couplé fait intervenir un certain nombre d'hypothèses :

- Pour le problème mécanique, c'est l'hypothèse des contraintes planes qui a été retenue car les dispositifs à modéliser ne sont soumis à aucune contrainte dans la troisième direction. Ils sont de plus d'épaisseur relativement faible.
- Pour le problème électromagnétique, une première approche est de considérer que l'induction magnétique suivant  $z$  peut être négligée ( $B_z = 0$ ). Ceci revient à considérer uniquement un potentiel scalaire électrique  $V$  et la troisième composante d'un potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  comme inconnues du problème électromagnétique.

L'hypothèse  $B_z = 0$  est cependant mise à mal pour l'étude harmonique par la fréquence de travail : l'existence du champ électrique dans le plan de travail entraîne une induction magnétique dans la direction normale au plan de travail. Il est donc nécessaire d'évaluer la validité de ces hypothèses.

### 3.1.1 Loi de comportement pour le problème 2D

#### Loi de comportement non couplé pour le problème 2D

Les lois de comportement non couplé pour le problème 2D sont introduites dans cette partie.

- Loi de comportement diélectrique : dans le cas bidimensionnel et isotrope, la permittivité électrique  $\epsilon$  peut s'écrire simplement :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

### 3. Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

---

- Loi de comportement magnétique : dans le cas bidimensionnel et isotrope, la perméabilité magnétique  $\mathbb{\mu}$  peut se ramener à :

$$\mathbb{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 \\ 0 & \mu_{11} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

- Loi de comportement mécanique : la matrice d'élasticité  $\mathbb{c}$  est de taille (3,3) :

$$\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

En utilisant les hypothèses simplificatrices, d'après [Azoum, 2005] la matrice de réductivité équivalente de l'équation (2.50) :

$$\begin{bmatrix} (s_{11} - s_{11}^{\mu}) + \text{tr}(\mathbb{S}^e) & 3(s_{12} - s_{12}^{\mu}) & 3(s_{13} - s_{13}^{\mu}) \\ 3(s_{21} - s_{21}^{\mu}) & (s_{22} - s_{22}^{\mu}) + \text{tr}(\mathbb{S}^e) & 3(s_{23} - s_{23}^{\mu}) \\ 3(s_{31} - s_{31}^{\mu}) & 3(s_{32} - s_{32}^{\mu}) & (s_{33} - s_{33}^{\mu}) + \text{tr}(\mathbb{S}^e) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

devient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}^{\mu} &= \begin{bmatrix} 2s_{11}^e - s_{22}^e - s_{33}^e & 3s_{12}^e \\ 3s_{21}^e & 2s_{22}^e - s_{11}^e - s_{33}^e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(2 + \frac{c_{13}}{c_{33}}\right) s_{11}^e - \left(1 - \frac{c_{23}}{c_{33}}\right) s_{22}^e & 3s_{12}^e \\ 3s_{21}^e & \left(2 + \frac{c_{23}}{c_{33}}\right) s_{22}^e - \left(1 - \frac{c_{23}}{c_{33}}\right) s_{11}^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

La réductivité équivalente  $\boldsymbol{\nu}^{\mu}$  dans le modèle 2D est différente de l'inverse de la perméabilité magnétique du matériau. Elle est de plus fonction des déformations  $s_{11}^e$ ,  $s_{12}^e$ ,  $s_{22}^e$  dans le plan.

#### 3.1.2 Hypothèses du problème mécanique

Pour le problème 2D, l'hypothèse des contraintes planes a été retenue : toutes les contraintes suivant la direction  $z$ , sont alors négligées (figure 3.1).

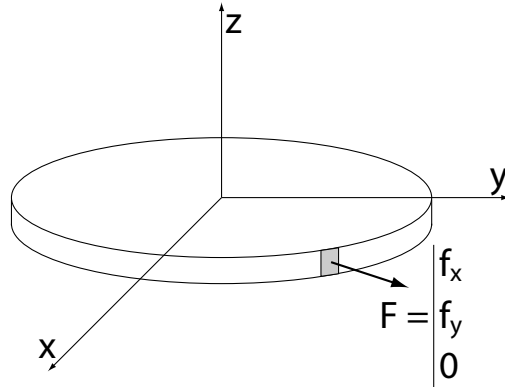


Figure 3.1 – Illustration de l'hypothèse de contrainte plane

On a alors :

$$t_{31} = t_{32} = t_{33} = 0 \quad (3.6)$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} s_{13}^e &= s_{23}^e = 0 \\ s_{33}^e &= -\frac{c_{13}}{c_{33}}s_{11}^e - \frac{c_{23}}{c_{33}}s_{22}^e \end{aligned} \quad (3.7)$$

#### Démonstration de l'équation (3.7)

D'après les équations (2.24) et (3.6) :

$$\begin{aligned} t_{31} &= 2\mu^* s_{31}^e = 0 \Rightarrow s_{31}^e = 0 \\ t_{32} &= 2\mu^* s_{32}^e = 0 \Rightarrow s_{32}^e = 0 \\ t_{33} &= c_{13}s_{11}^e + c_{23}s_{22}^e + c_{33}s_{33}^e = 0 \Rightarrow s_{33}^e = -\frac{c_{13}}{c_{33}}s_{11}^e - \frac{c_{23}}{c_{33}}s_{22}^e \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'hypothèse des contraintes planes nous permet de réduire le nombre d'inconnues.

De plus, la déformation suivant la direction  $z$  peut se déduire de la déformation dans le plan de travail. Il est donc nécessaire de ne connaître que la déformation dans le plan de travail, ce qui permet de se restreindre aux inconnues de déplacement dans le plan  $(x,y)$ , qui sont :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

L'opérateur  $\mathcal{D}$  dans ce cas est défini comme suit :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Hypothèses du problème électromagnétique

#### Cas des faibles fréquences

Pour un problème électromagnétique, si l'épaisseur de pénétration correspondant à la fréquence de travail est bien plus importante que l'épaisseur de l'échantillon magnétostrictif étudié, il est possible de négliger les courants de Foucault. Dans cette première approche, les hypothèses considérées sont les suivantes :

- L'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  sont invariants par rapport à  $z$  (structure infiniment longue dans cette direction).
- La composante de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  est nulle dans la direction normale au plan de travail (direction  $z$ ).

- Le courant de déplacement  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  est négligé dans l'équation (2.4). Seul le courant de conduction est considéré.

Ces hypothèses conduisent à écrire  $\mathbf{B}$  sous la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1(x, y) \\ B_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

De plus, ces hypothèses impliquent que :

- Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  peut être pris colinéaire à  $z$ . Il est de plus invariant par rapport à  $z$ .

#### Démonstration de "la colinéarité entre $\mathbf{a}$ et $z$ "

A partir de la relation  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{B}$  s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} b_1(x, y) \\ b_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

L'induction  $\mathbf{B}$  ne dépend pas de  $z$ , ainsi  $a_3$  ne varie pas en fonction de  $z$ .  
 $b_3 = 0$ , d'où  $\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0$ ,  $a_2 = a_1 = 0$  est la solution que nous avons retenu.

- Le champ électrique dans le plan de travail est calculé en fonction du potentiel électrique :  $\mathbf{E}_{\parallel} = -\mathbf{grad}_{\parallel} V$  où  $\mathbf{grad}_{\parallel}$  est l'opérateur gradient bidimensionnel sur un scalaire  $U$  défini par :

$$\mathbf{grad}_{\parallel} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

**Démonstration  $\mathbf{E}_{\parallel} = -\mathbf{grad}_{\parallel} V$** 

A partir de la relation  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{E}$  s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial e_3}{\partial y} - \frac{\partial e_2}{\partial z} \\ \frac{\partial e_1}{\partial z} - \frac{\partial e_3}{\partial x} \\ \frac{\partial e_2}{\partial x} - \frac{\partial e_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial t} \\ \frac{\partial b_2}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$b_3 = 0, \quad \frac{\partial e_2}{\partial x} - \frac{\partial e_1}{\partial y} = 0, \text{ d'où on peut écrire : } \mathbf{E}_{\parallel} = -\mathbf{grad}_{\parallel} V$$

Enfin, la relation  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{a}$  peut se ramener à :

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{grad}_{\parallel} a_3 \quad \text{où } \mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

**Démonstration de l'équation (3.15)**

Dans le repère  $(x, y, z)$ ,  $\mathbf{a}$  étant uniquement suivant  $z$  :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial y} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Si on s'intéresse seulement aux composants de  $\mathbf{B}$  dans le plan de travail,  $\mathbf{B}$  peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial y} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x} \\ \frac{\partial a_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{grad}_{\parallel} a_3 \quad (3.17)$$

**Hypothèses pour les fréquences intermédiaires**

Afin de respecter la conservation du courant, une équation supplémentaire a été ajoutée.

On a toujours :



### 3. Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

---

- Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  est suivant la direction  $z$  et indépendant de  $z$  ( $a_1 = a_2 = 0$ ).
  - Le champ électrique dans le plan de travail, noté  $\mathbf{E}_{\parallel}$ , peut s'écrire :  $\mathbf{E}_{\parallel} = -\mathbf{grad}_{\parallel} V$ .
  - Le champ électrique dans les conducteurs suivant la direction  $z$ , peut être calculé par :  $e_3 = \frac{\partial(a_3 - a^0)}{\partial t}$  où  $a^0$  est une constante par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$ .
  - De plus, dans les régions conductrices, la densité de courant est calculée en fonction du champ électrique :  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  ( $\sigma = 0$  dans les matériaux piézoélectriques et  $\sigma \neq 0$  dans les matériaux magnétostrictifs).
- La conservation du courant s'écrit :

$$\iiint_{\Delta} \mathbf{J} dx dy dz = 0 \quad (3.18)$$

où  $\Delta$  est la surface du conducteur dans le plan d'étude. Dans le cas bidimensionnel,  $\frac{\partial_t \mathbf{J}}{\partial_t z} = 0$ , la conservation du courant devient :

$$\sigma \int_{\Delta} \frac{\partial(a_3 - a^0)}{\partial t} d\Delta = 0 \quad (3.19)$$

Dans ce cas, on n'a besoin de calculer le potentiel vecteur magnétique que suivant  $z$ . Comme dans le premier cas, il est toujours possible d'utiliser la relation  $\mathbf{B} = \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{grad}_{\parallel} a_3$ .

## 3.2 Problème couplé électro-magnéto-mécanique

L'étude d'un problème de couplage électro-magnéto-mécanique revient à la résolution d'un système d'équations différentielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus connues pour résoudre ce type d'équation. Dans cette partie, nous rappelons rapidement la méthode de Galerkin afin de l'appliquer au problème électro-magnéto-mécanique couplé.

### 3.2.1 Méthode de Galerkin

Toute équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H}(u) = F \quad \text{définie sur le domaine } \Omega \quad (3.20)$$

où  $u$  est la fonction recherchée,  $\mathcal{H}$  un opérateur local sur  $u$ .

L'équation aux limites associée à l'équation (3.20) est :

$$\mathcal{L}(u) = F_0, \quad \text{défini sur } \Gamma, \text{ contour de } \Omega \quad (3.21)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur correspondant aux conditions aux limites sur  $u$ .  
L'équation (3.20) est équivalente à la suivante :

$$\mathcal{R} = \mathcal{H} - F = 0 \quad (3.22)$$

Les concepts fondamentaux de la méthode des éléments finis sont :

- Le domaine  $\Omega$  continu est discrétisé en un nombre fini  $n$  d'éléments simples  $\Omega_e$ .  
On recherche alors une solution d'approximation  $\hat{\mathbf{u}}$  de  $\mathbf{u}$ , mise sous la forme :

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_e \{\mathbf{u}^e\} \quad (3.23)$$

- Ces éléments sont connectés par des nœuds ou des arêtes.
- Pour chaque élément,  $\mathbf{u}^e$  est calculé sur les nœuds ou des arrêtes  $\tilde{u}_i^e$ .
- Un assemblage des valeurs  $\{\mathbf{u}^e\}$  trouvées permet finalement d'obtenir une solution approximée  $\hat{u}$ .

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}^e\} &= \sum_i N_i^e(x, y, z) \tilde{u}_i^e \\ &= \mathbf{N}^e(x, y, z) \cdot \{\tilde{\mathbf{u}}^e\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

où  $N^e(x, y, z)_i$  est la fonction de forme liée à la valeur  $\tilde{u}_i^e$  élémentaire de l'élément simple  $\Omega_e$ .

La forme intégrale de l'équation (3.22) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \mathcal{R} = 0 \quad (3.25)$$

où  $\mathbf{w}$  est une fonction arbitraire définie sur le domaine  $\Omega$ . Si l'équation (3.25) est satisfaite pour toute fonction  $\mathbf{w}$ , l'équation (3.20) sera satisfaite pour tous les points du domaine défini. On appelle l'équation (3.25) la formulation faible du problème (3.20) [Zienkiewicz *et al.*, 1967].

On écrit  $\mathbf{w}$  [Zienkiewicz *et al.*, 1967] comme suit :

$$\mathbf{w} = \sum_e \mathbf{w}^e \quad (3.26)$$

Il y a plusieurs choix possibles de fonction de pondération  $\mathbf{w}^e$ . Un des choix est d'utiliser directement la fonction de forme  $\mathbf{w}^e = \mathbf{N}^e$  : c'est la méthode dite de Galerkin [Reddy, 1993].

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \mathcal{R} \approx \sum_{\Omega_e} \mathbf{N}^e \mathcal{R}(\mathbf{N}^e \cdot \{\tilde{\mathbf{u}}^e\}) = 0 \quad (3.27)$$

Le système d'équations (3.27) est à résoudre pour trouver les inconnues  $\tilde{\mathbf{u}}^e$  pour chaque élément.

L'élément simple utilisé dans notre modèle est le triangle avec trois nœuds par élément. Les inconnues sont nodales, ce qui conduit à deux inconnues mécaniques, une inconnue magnétique et une inconnue électrique par nœud.

### Conditions aux limites

Le problème aux limites de la formulation (3.27), à partir de l'équation (3.21) est :

$$\sum_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_r} \bar{w}_i \mathcal{L}(N_i u_i) d\Gamma = F_0 \quad (3.28)$$

où  $\bar{w}_i$  est la fonction de pondération liée à  $w_i$ .

Il y a deux types de conditions aux limites qui seront utilisées dans notre étude.

- Conditions aux limites de type Dirichlet : les valeurs de  $u$  sont connues sur le contour  $\Gamma$ . Dans ce cas on n'a pas besoin de connaître la fonction de pondération  $\bar{w}_i$  sur le contour.
- Conditions aux limites de type Neumann : les dérivées spatiales de  $u$  sont connues sur le contour.

La figure 3.2 illustre ces types de conditions aux limites.

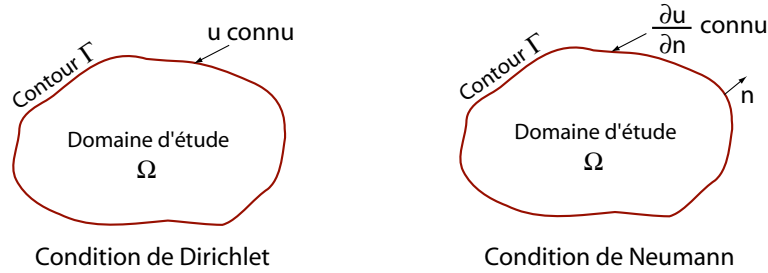


Figure 3.2 – Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann

Les conditions aux limites de type Dirichlet sont par exemple utilisées lorsqu'une électrode déposée sur le matériau piézoélectrique est mise à la masse ( $V = 0$ ). Dans le cas où l'on souhaite imposer la composante tangentielle du champ magnétique, une condition aux limites de type Neumann sera prise en compte.

Dans la partie suivante, la méthode de Galerkin est appliquée au problème de comportement couplé décrit par l'équation (2.69)

### 3.2.2 Formulation mécanique

A partir de l'équation (2.69), on écrit :

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S} - \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{E} - \mathbf{q}^t \cdot \mathbf{B} \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{E}$  et  $\mathbf{q}^t \cdot \mathbf{B}$  correspondent respectivement aux couplages électro-mécanique et magnéto-mécanique.

A partir de l'équation d'équilibre mécanique (2.9), la formulation faible correspondante s'écrit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left( \mathbf{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} - \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0 \quad (3.30)$$

avec  $\mathbf{w}$  une fonction de forme.  $\Omega$  est le domaine de définition de  $\mathbf{u}$ .

L'équation (3.30) peut être simplifiée en utilisant l'égalité (3.31) ci-dessous :

$$\operatorname{div}(\mathbf{w}.\mathbf{T}) = \mathbf{w}.\mathbf{div}\mathbf{T} + \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{T} \quad (3.31)$$

Par intégration par partie, le premier terme  $\int_{\Omega} \mathbf{w}.\mathbf{div}\mathbf{T}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{w}.\mathbf{div}\mathbf{T} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w}.\mathbf{T}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{T} d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma} \mathbf{T}.\mathbf{n}.\mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{T} d\Omega \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $\Gamma$  est le contour de  $\Omega$ .

L'équation (3.32) permet de modifier l'équation (3.30), ce qui conduit à :

$$\int_{\Omega} \left( \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{T} + \rho_m \mathbf{w}.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{T}.\mathbf{n}.\mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}.\mathbf{f} d\Omega \quad (3.33)$$

Il s'agit ensuite d'insérer la loi de comportement (3.29), dans cette équation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathbf{w} : \left( \mathbb{c} : \mathbf{S} - \mathbf{e}^t.\mathbf{E} - \mathbf{q}^t.\mathbf{B} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho_m \mathbf{w}.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{w}.\mathbf{f} d\Omega \\ &+ \oint_{\Gamma} \mathbf{T}.\mathbf{w}.\mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.34)$$

En remplaçant  $\mathbf{S} = \mathbb{D}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$ , et  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{a}$  dans l'équation (3.34), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbb{c} : \mathbb{D}\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega_V} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{e}^t.\mathbf{grad} V d\Omega - \int_{\Omega_a} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{q}^t.\mathbf{rot} \mathbf{a} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \rho_m \mathbf{w}.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{w}.\mathbf{f} d\Omega + \oint_{\Gamma} \mathbf{T}.\mathbf{n}.\mathbf{w} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.35)$$

où  $\Omega_V$  et  $\Omega_a$  sont les domaines de définition de  $V$  et  $\mathbf{a}$  respectivement.

### Formulation dans le cas 2D

La formulation est alors établie pour le cas 2D. A partir des hypothèses précisées dans la partie 3.2, l'équation (3.35) peut se simplifier et se ramène à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbb{c} : \mathbb{D}\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega_V} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{e}^t.\mathbf{grad}_{\parallel} V d\Omega - \int_{\Omega_a} \mathbb{D}\mathbf{w} : \mathbf{q}^t.\mathbf{r}^*.\mathbf{grad}_{\parallel} a_3 d\Omega \\ + \int_{\Omega} \rho_m \mathbf{w}.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{w}.\mathbf{f} d\Omega + \oint_{\Gamma_s} \mathbf{T}.\mathbf{w}.\mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.36)$$

### Discrétisation

Pour le problème bidimensionnel, le maillage élémentaire considéré est le triangle, les inconnues étant nodales. Elles s'écrivent alors sous la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [\mathbf{w}] \{\mathbf{u}\} \\ V &= [N_v] \{V\} \\ a_3 &= [N_a] \{a_3\}\end{aligned}\tag{3.37}$$

où  $[\mathbf{w}]$ ,  $[N_v]$  et  $[N_a]$  sont les fonctions de forme associées aux variables  $\mathbf{u}$ ,  $V$  et  $a_3$ . La déformation  $\mathbf{S}$ , le champ électrique  $\mathbf{E}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  seront alors obtenus après résolution par :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}} &= \mathcal{D}[\mathbf{w}] \{\mathbf{u}\} = [G_u] \{\mathbf{u}\} \\ \mathbf{E} &= -\mathbf{grad}_{\parallel} [N_v] \{V\} = [G_v] \{V\} \\ \mathbf{B} &= \mathbb{r}^* \mathbf{grad}_{\parallel} [N_a] \{a_3\} = [\mathbb{r}^*] [G_a] \{a_3\}\end{aligned}\tag{3.38}$$

L'équation (3.36) se réécrit sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned}\sum_e \int_{\Omega^e} [G_u] : \mathbb{c} : [G_u] \{\mathbf{u}\} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} [G_u] : \mathbb{e}^t : [G_v] \{V\} d\Omega - \\ \sum_e \int_{\Omega^e} [G_u] : \mathbb{q}^t : [\mathbb{r}^*] [G_a] \{a_3\} d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \omega^2 \rho_m [\mathbf{w}]^t : [\mathbf{w}] \{\mathbf{u}\} d\Omega = \mathbf{f}\end{aligned}\tag{3.39}$$

où  $\Omega^e$  est le domaine élémentaire associé à l'élément de maillage  $e$ .

L'équation (3.39) s'écrit finalement sous forme matricielle :

$$([\mathbb{K}_{uu}] - \omega^2 [\mathbb{M}]) \{\mathbf{u}\} + [\mathbb{K}_{up}] \{V\} + [\mathbb{K}_{ua}] \{a_3\} = \{\mathbf{f}\}\tag{3.40}$$

avec

$$\begin{aligned}[\mathbb{K}_{uu}] &= \sum_e \int_{\Omega^e} [G_u]^t \mathbb{c} [G_u] d\Omega \\ [\mathbb{M}] &= \sum_e \int_{\Omega^e} \rho_m [\mathbf{w}]^t [\mathbf{w}] d\Omega \\ [\mathbb{K}_{up}] &= \sum_e \int_{\Omega^e} [G_u]^t \mathbb{e}^t [G_v] d\Omega \\ [\mathbb{K}_{ua}] &= - \sum_e \int_{\Omega^e} [G_u]^t \mathbb{q}^t [\mathbb{r}^*] [G_a] d\Omega\end{aligned}\tag{3.41}$$

L'équation (3.40) correspond à une équation mécanique classique à laquelle s'ajoutent des termes de couplage. De plus, un terme d'amortissement peut être ajouté  $[\mathcal{C}] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  où  $[\mathcal{C}]$  est la matrice d'amortissement.

Classiquement,  $[\mathcal{C}] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  est considéré proportionnel à la matrice de raideur  $[\mathbb{K}_{uu}]$  (modèle de Rayleigh [Shen *et al.*, 2005]) :

$$[\mathcal{C}] = \alpha [\mathbb{K}_{uu}]\tag{3.42}$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'amortissement. En pratique, sa valeur est obtenue expérimentalement. En notant  $[\mathbb{K}_{uu}^*] = [\mathbb{K}_{uu}] + j\omega\alpha[\mathbb{K}_{uu}] - \omega^2[\mathbb{M}]$  l'équation (3.40) devient :

$$[\mathbb{K}_{uu}^*] \{\mathbf{u}\} + [\mathbb{K}_{up}] \{V\} + [\mathbb{K}_{ua}] \{a_3\} = \{\mathbf{f}\}\tag{3.43}$$

### 3.2.3 Formulation électrique

D'après la loi de comportement (2.69), les variables électriques et mécaniques sont reliées par :

$$\mathbf{D} = \mathfrak{e} : \mathbb{S} + \mathfrak{e} \cdot \mathbf{E} \quad (3.44)$$

La formulation faible du problème électrique est obtenue à partir de l'équation d'équilibre électrique  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  :

$$\int_{\Omega_V} w \text{div } \mathbf{D} \, d\Omega = \int_{\Omega_V} \rho w \, d\Omega \quad (3.45)$$

En utilisant la relation :

$$\text{div}(w \mathbf{D}) = w \text{div}(\mathbf{D}) + \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{D} \quad (3.46)$$

et en développant l'équation comme dans le problème mécanique et en intégrant la loi de comportement, l'équation (3.45) peut s'écrire :

$$\int_{\Omega_V} \mathbf{grad} w \cdot \mathfrak{e} : \mathbb{S} \, d\Omega + \int_{\Omega_V} \mathbf{grad} w \cdot \mathfrak{e} \cdot \mathbf{E} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} w \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_V} \rho \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \quad (3.47)$$

L'équation (3.47) s'écrit sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} [G_v] \cdot \mathfrak{e} : [G_u] \{ \mathbf{u} \} \, d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} [G_v] \cdot \mathfrak{e} \cdot [G_v] \{ V \} \, d\Omega &= \sum_e \int_{\Omega^e} \rho [N_v]^t \, d\Omega \\ &+ \sum_e \oint_{\Gamma_s} D_n [N_v]^t \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec  $D_n$  la composante de  $\mathbf{D}$  perpendiculaire à  $\Gamma$ .

La formulation sous forme matricielle s'écrit :

$$[\mathbb{K}_{up}]^t \{ \mathbf{u} \} + [\mathbb{K}_{pp}] \{ V \} = [Q] + [Q_n] \quad (3.49)$$

où :

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_{pp}] &= \sum_e \int_{\Omega^e} [G_v]^t [\mathfrak{e}] [G_v] \, d\Omega \\ [Q] &= \sum_e \int_{\Omega^e} \rho [N_v]^t \, d\Omega \\ [Q_n] &= \sum_e \oint_{\Gamma_s} D_n [N_v]^t \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.50)$$

Cette équation correspond à l'équation électrique classique avec un terme supplémentaire de couplage électro-mécanique.

### 3.2.4 Formulation magnétique

D'après la loi de comportement, les variables magnétiques et mécaniques sont reliées par :

$$\mathbf{H} = -\mathfrak{q} : \mathbb{S} + \mathfrak{v} \cdot \mathbf{B} \quad (3.51)$$

En développant le calcul de la même façon que pour la formulation électrique à partir de l'équation d'équilibre magnétique  $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , la formulation magnétique s'écrit sous la forme matricielle ci-dessous :

$$-[\mathbb{K}_{ua}]^t \{\mathbf{u}\} + [\mathbb{K}_{aa}] \{a_3\} = [I] + [I_n] \quad (3.52)$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_{aa}] &= \sum_e \int_{\Omega^e} [G_a]^t [\mathbf{r}^*]^t [\nu] [\mathbf{r}^*] [G_a] d\Omega \\ [I] &= \sum_e \int_{\Omega^e} j_3 [N_v]^t d\Omega \\ [I_n] &= \sum_e \oint_{\Gamma_s} H_t [N_v]^t d\Gamma \end{aligned} \quad (3.53)$$

avec  $j_3$  la densité de courant électrique suivant la direction  $z$ ,  $H_t$  la composante de  $\mathbf{H}$  tangente à  $\Gamma_s$ .

A partir de l'équation (3.19), une équation supplémentaire est ajoutée pour la conservation du courant dans la région conductrice.

$$j\omega\sigma \int_{\omega} w(a_3 - a^0) d\Omega = 0 \quad (3.54)$$

En notant  $\Delta$  la surface totale du conducteur, l'équation (3.54) devient :

$$j\omega\sigma \int_{\omega} w a_3 d\Omega - j\omega\sigma \Delta a^0 = 0 \quad (3.55)$$

L'équation (3.55) s'écrit sous forme matricielle :

$$[\mathbf{J}] a_3 - [\mathbf{S}] a^0 = 0 \quad (3.56)$$

où :

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}] &= j\omega \sum_e \int_{\Omega^e} [N_v]^t d\Omega \\ [\mathbf{S}] &= j\omega \Delta \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dans une configuration de capteur magnétique, on suppose qu'il n'y a ni charge électrique ( $\rho = 0$ ), ni densité de courant ( $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ). En regroupant (3.40), (3.49) et (3.52), le système éléments finis du problème électro-magnéto-mécanique peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{uu} & \mathbb{K}_{up} & \mathbb{K}_{ua} & 0 \\ \mathbb{K}_{pu} & \mathbb{K}_{pp} & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_{au} & 0 & \mathbb{K}_{aa} & \mathbf{J}^t \\ 0 & 0 & \mathbf{J} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ V \\ a_3 \\ a^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ I_n \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Le système (3.58) sera résolu par la méthode de Gauss.

### 3.3 Structures élémentaires : bilame et trilame

Dans cette partie, le modèle harmonique bidimensionnel avec les différentes hypothèses est appliqué à des structures simples de type bilame et trilame. En imposant le point de polarisation, le comportement du matériau magnétostrictif est linéaire. Les propriétés des matériaux utilisés sont détaillées dans le tableau 3.1. Ces structures composites sont ensuite soumises à un champ magnétique harmonique qui serait uniforme en l'absence de matériau ferromagnétique.

Le but de cette partie est d'observer seulement l'influence de la fréquence sur les structures composites. Trois gammes des fréquences sont à examiner : faibles fréquences (de quelques Hz jusqu'à centaines de Hz), fréquences intermédiaires (de quelques kHz à 100 kHz) et fréquences de l'ordre de quelques centaines de kHz. Les hypothèses électromagnétiques utilisées sont celles pour les fréquences intermédiaires.

Les domaines d'études sont définis par la figure 3.3. Des conditions aux limites mécaniques de type encastrement ( $u_x = u_y = 0$ ) sont imposées pour maintenir en position les structures composites. Nous avons créé une boîte d'air qui englobe d'échantillon. Les conditions aux limites magnétiques sont les suivantes : sur les bords haut et bas des boîtes d'air, les potentiels magnétiques sont imposés pour créer un champ magnétique uniforme en l'absence de matériau ferromagnétique.

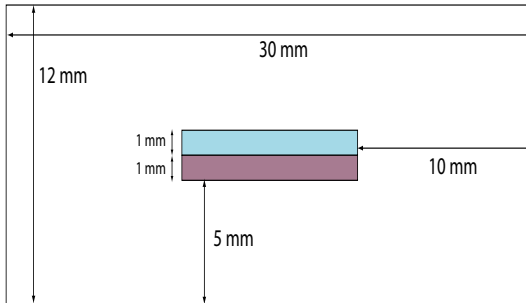
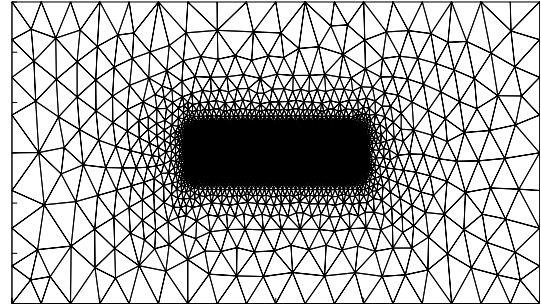
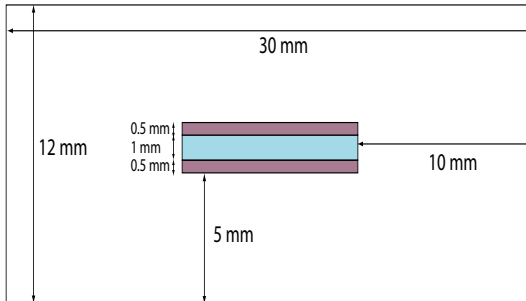
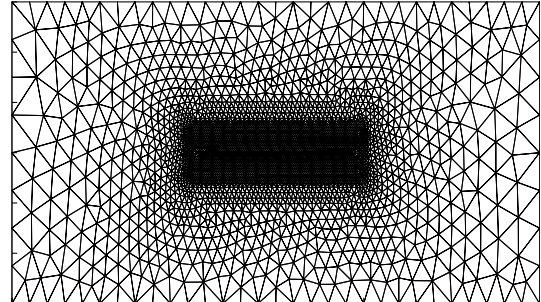
(a) *Domaine d'étude du bilame*(b) *Maillage correspondant*(c) *Domaine d'étude du trilame*(d) *Maillage correspondant*

Figure 3.3 – Domaines d'étude et maillages correspondant des structures composites



### 3. Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

En quasi-statique ( $f = 10Hz$ ), les figures 3.4(a) et 3.4(b) montrent la concentration du flux magnétique dans les couches magnétostrictives. Cela induit une déformation des structures. Dans le cas du bilame, cela se traduit par une flexion induite par la différence de rigidité des matériaux constituant les deux couches. Dans le cas du trilame, la symétrie de la structure interdit la flexion, qui présente alors un allongement (figures 3.4(c) et 3.4(d)).

La déformation des structures implique l'apparition de tensions aux électrodes des éléments piézoélectriques. Les figures 3.4(e) et 3.4(f) présentent les distributions des potentiels électriques récupérés. Il apparaît que le potentiel électrique est plus important pour le trilame que pour le bilame.

Matériau piézoélectrique			
Coefficient d'élasticité	$c_{11}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	7.97
	$c_{12}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	3.58
	$c_{22}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	6.68
	$c_{44}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	0.57
Constantes électriques	$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	-	15.92
	$\epsilon_{22}/\epsilon_0$	-	15.92
Constantes piézoélectriques	$\alpha_{21}$	$(\text{C/m}^2)$	-5.9
	$\epsilon_{22}$	$(\text{C/m}^2)$	15.2
	$\epsilon_{55}$	$(\text{C/m}^2)$	10.5
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	1
Matériau piézomagnétique			
Coefficient d'élasticité	$c_{11}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	3.11
	$c_{12}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	1.52
	$c_{22}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	3.56
	$c_{44}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	0.68
Constantes électriques	$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	-	5
Constantes piézomagnétiques	$q_{11}$	-	156.8
	$q_{21}$	-	-60.9
	$q_{55}$	-	76.57
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	50
Conductivité électrique	$\sigma$	$10^8 \text{ SI}$	1

Tableau 3.1 – Description des paramètres matériaux utilisés pour l'analyse des structures composites [Y.X.Liu *et al.*, 2003b]

A faible fréquence (à 10 Hz sur la figure 3.4), les résultats obtenus sont identique à ceux obtenus lorsque l'on diminue la fréquence de travail. L'épaisseur de peau à 10 Hz est de 2mm, cet épaisseur est plus importante que celle de la couche magnétostrictive. Lorsque la fréquence appliquée est augmentée à 1kHz (figure 3.5), l'épaisseur de peau correspondante est de 0.2 mm, quelques différences apparaissent : l'induction magnétique à l'intérieur des couches magnétostrictives n'est plus homogène, elle se concentre sur le bord des couches. De même, la déformation de la structure évolue

en fonction de la fréquence de travail. Les potentiels électriques sur les électrodes des couches piézoélectriques évoluent aussi.

Si la fréquence appliquée augmente encore, à 10 kHz (figure 3.6), le phénomène de concentration du flux magnétique dans les couches magnétostrictives est encore plus facile à observer, surtout dans le cas du bilame. Ceci illustre l'effet des courants de Foucault.

### 3. Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

---

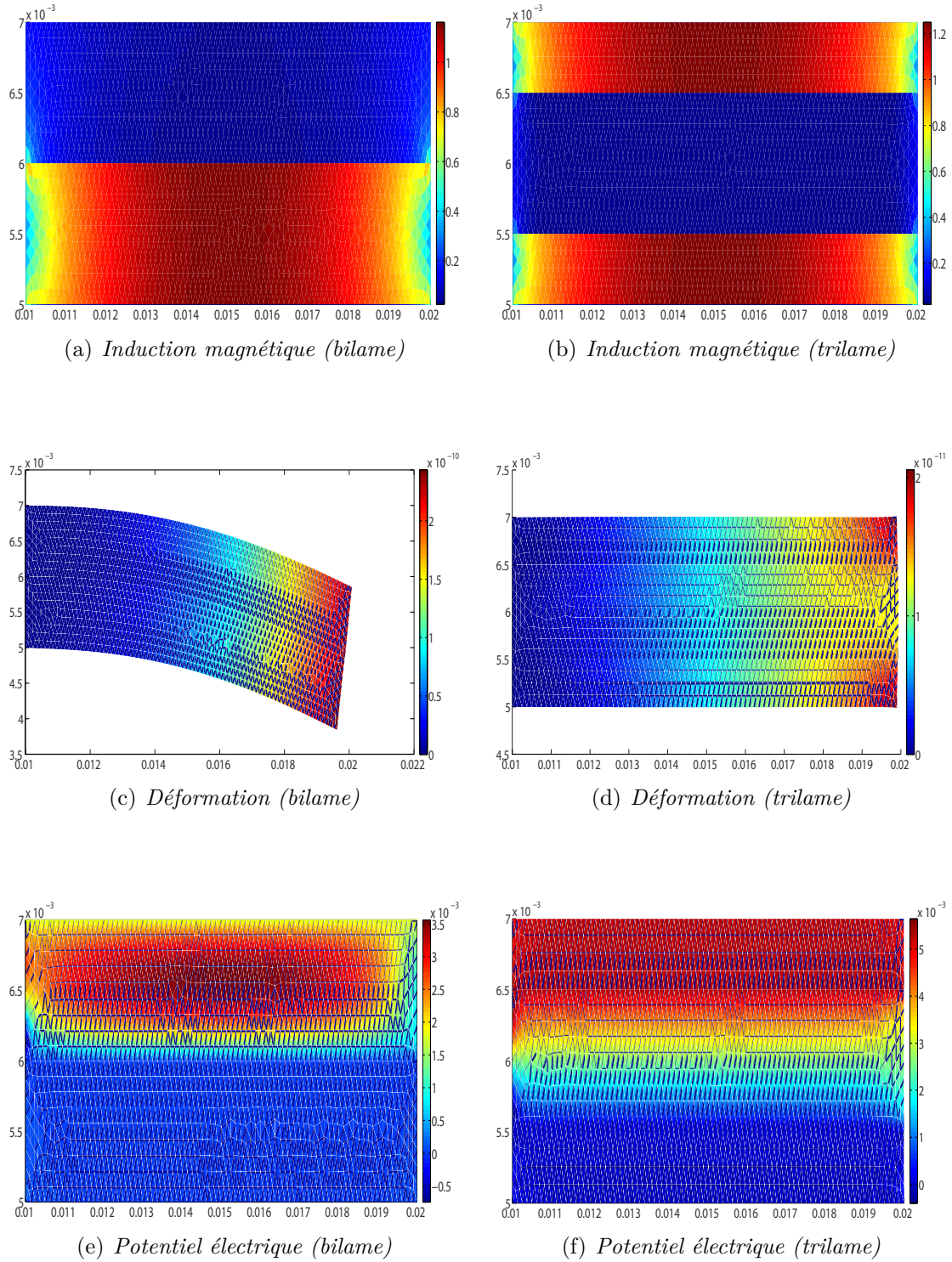


Figure 3.4 – Distribution de l'induction magnétique, des potentiels électriques et de la déformation totale ( $f = 10$  Hz)

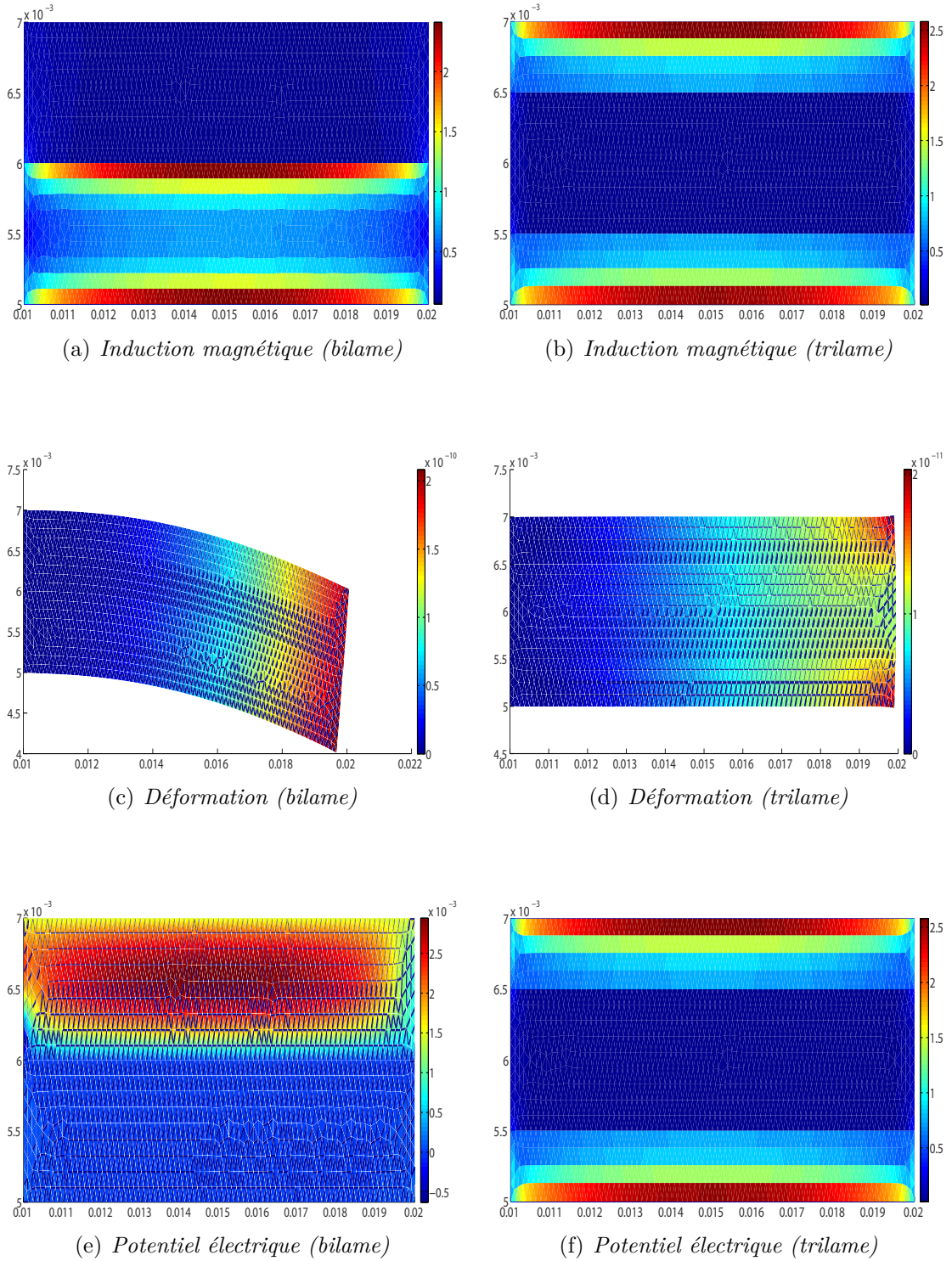


Figure 3.5 – Distribution de l'induction magnétique, des potentiels électriques et de la déformation totale ( $f = 1\text{kHz}$ )



### 3. Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

---

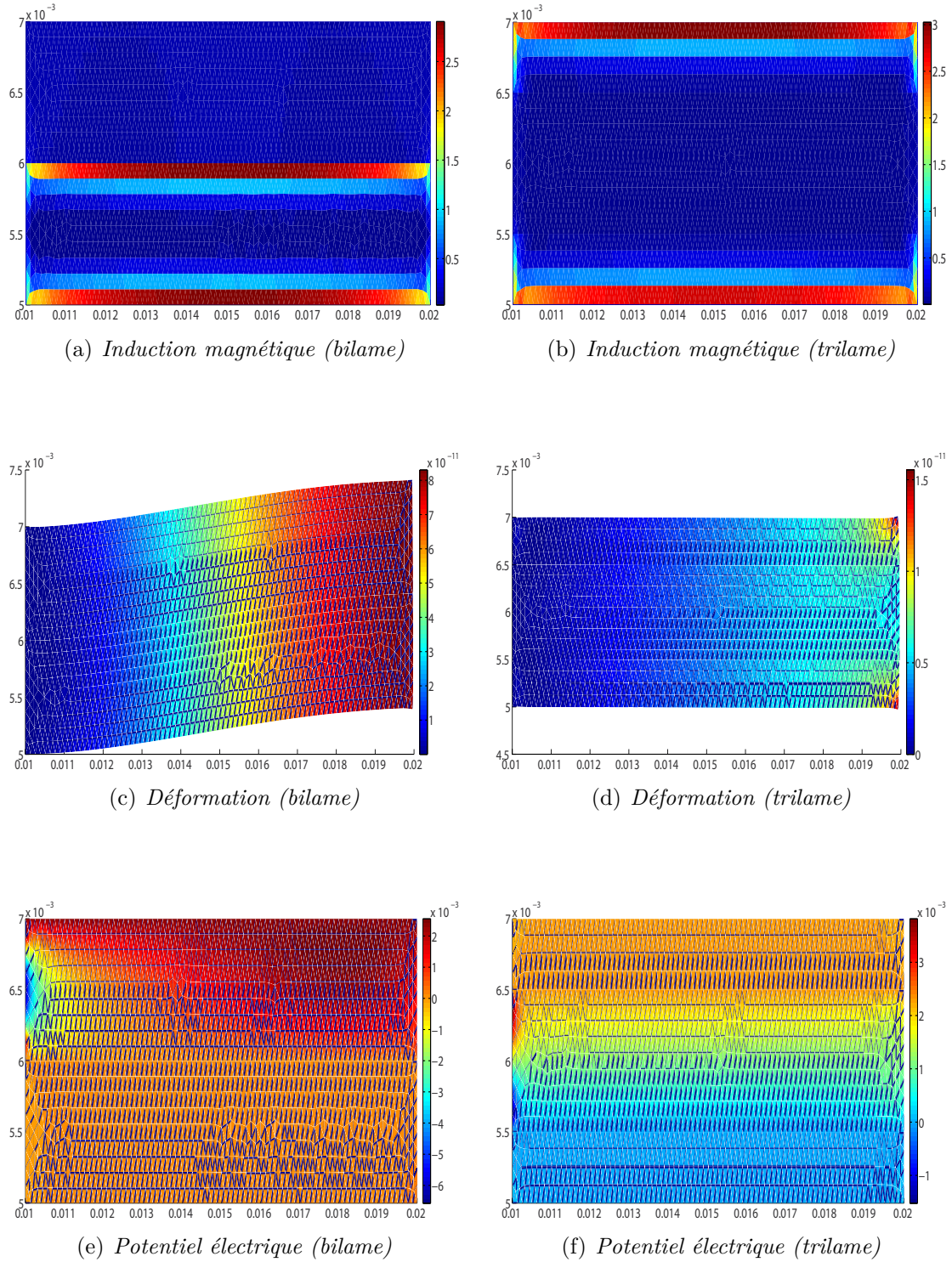


Figure 3.6 – Distribution de l'induction magnétique, des potentiels électriques et de la déformation totale ( $f = 10$  kHz)

Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 montrent également l'influence de la fréquence sur la déformation des structures bilames et trilames et sur la tension, il est intéressant de

travailler autour des fréquences présentant des déformations maximales. L'évolution des potentiels électriques en fonction de la fréquence est illustrée sur la figure 3.7. Le coefficient de l'amortissement est de 0.2 %. Les maxima du potentiel électrique sont atteints pour des fréquences dites fréquences de résonance. La première fréquence de résonance dans le cas du bilame (flexion) est plus faible que dans le cas du trilame (allongement).

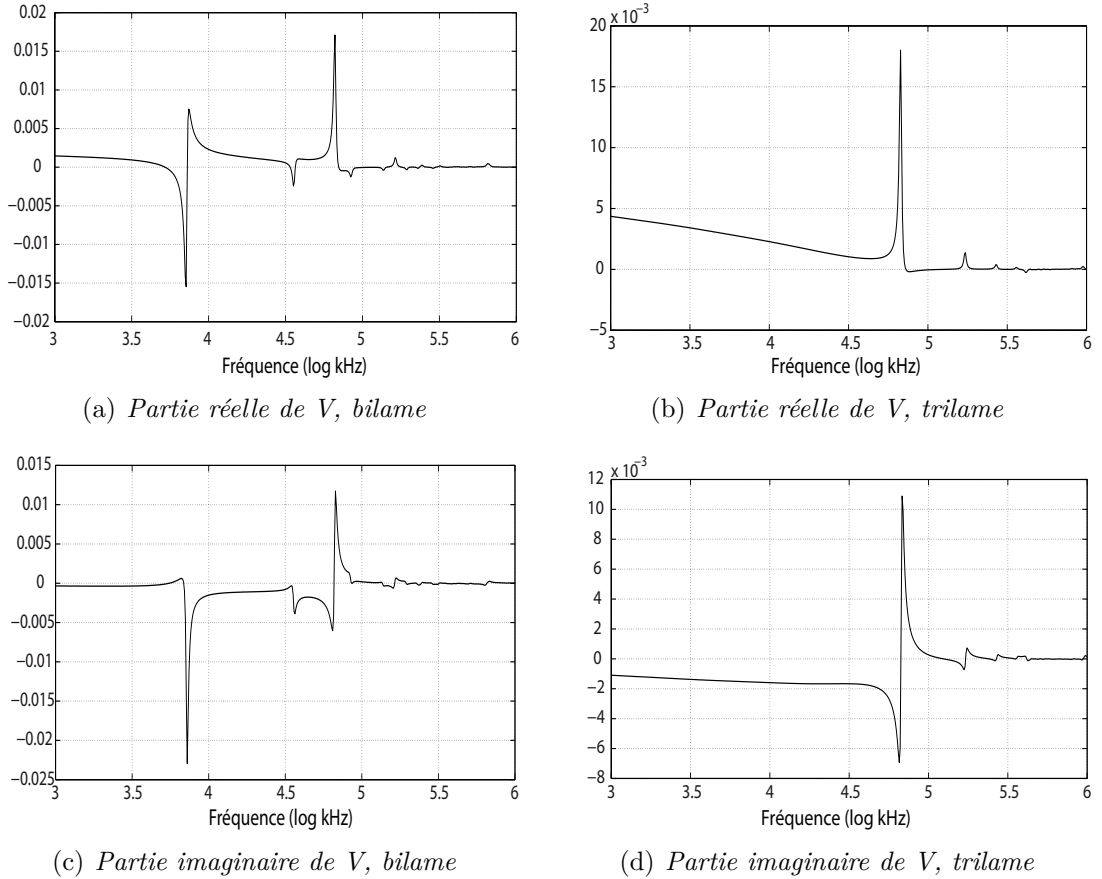


Figure 3.7 – Evolution des parties réelle et imaginaire du potentiel électrique en fonction de la fréquence

Le couplage intervient dans l'équation mécanique comme ci-dessous :

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}\mathbf{S} + \mathbf{q}\mathbf{B} = (\mathbf{c} + \mathbf{c}^1)\mathbf{S} \quad (3.59)$$

Le terme  $\mathbf{c}^1$  caractérise le phénomène de couplage. Si ce terme est faible devant  $\mathbf{c}$ , les fréquences de résonance obtenues sont proches des fréquences de résonances mécaniques. La figure 3.8 présente la courbe d'évolution du potentiel électrique dans le cas où l'effet magnétoélectrique par les équations de Maxwell sous régime harmonique est négligé.

### 3. Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

---

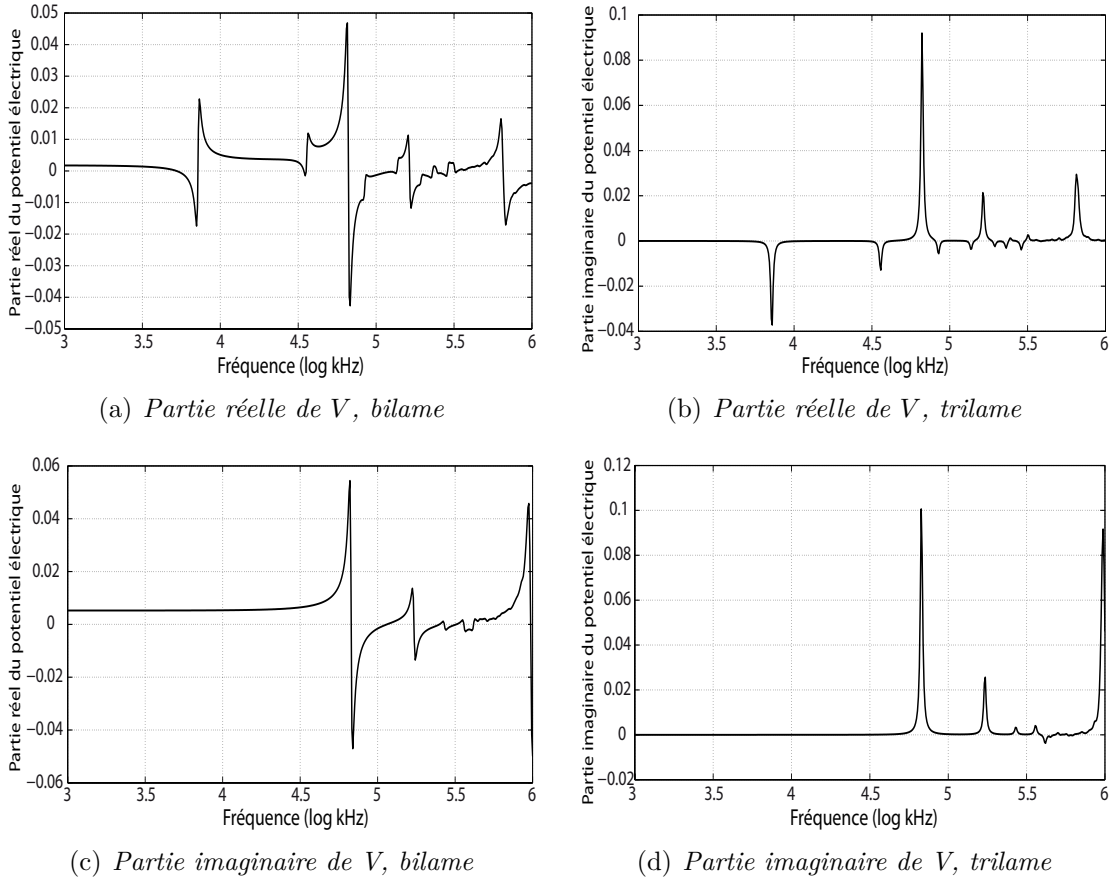


Figure 3.8 – *Evolution des parties réelle et imaginaire du potentiel électrique en fonction de la fréquence*

La figure 3.8 montre l'effet négatif des courants de Foucault, déjà constaté expérimentalement par Wan *et al* [Wan *et al.*, 2003]. Les tensions sont en effet plus importantes dans le cas où l'effet de couplage par les équations de Maxwell n'est pas considéré. La figure 3.7 nous permet de déterminer les fréquences de résonance pour lesquelles les tensions atteignent leur maxima.

#### 3.3.1 Modèle 2D complet

Les résultats obtenus montrent une évolution d'un potentiel électrique dans l'élément piézoélectrique sous régime harmonique, d'où existence d'un champ électrique dans le plan de travail. D'après Maxwell-Gauss, il existe alors une induction magnétique normale au plan de travail. L'hypothèse consistant à négliger l'induction magnétique suivant  $z$  doit être justifiée.

On suppose que le matériau piézoélectrique est polarisé suivant  $y$ . La formulation suivante se propose de vérifier si l'induction magnétique suivante  $z$  est assez faible pour être négligée.

Au lieu de résoudre les équations d'équilibre électromagnétique  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  et  $\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$ , cette nouvelle formulation résout :

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.60)$$

### Lois de comportement

Dans la formulation précédente du couplage électro-mécanique, les variables d'état étaient la déformation  $\mathbf{S}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$ . Dans cette nouvelle formulation, la déformation  $\mathbf{S}$  et l'induction électrique  $\mathbf{D}$  sont les variables d'état. La loi de comportement piézoélectrique est supposée linéaire, avec les variables d'état  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{D}$ , et la loi de comportement peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{c}^{\mathbf{D}} : \mathbf{S} + \mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{\kappa} : \mathbf{S} + \mathbf{e}^{-1} \cdot \mathbf{D}\end{aligned}\quad (3.61)$$

Dans l'équation (2.69), nous avons établi la loi de comportement piézoélectrique qui est :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{c}^{\mathbf{E}} : \mathbf{S} - \mathbf{e}^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \mathbf{S} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}\quad (3.62)$$

Dans l'équation (3.61), les matrices  $\mathbf{c}^{\mathbf{D}}$  et  $\mathbf{\kappa}$  peuvent se calculer à partir des matrices  $\mathbf{c}^{\mathbf{E}}$  et  $\mathbf{e}$  sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^{\mathbf{D}} &= \mathbf{c}^{\mathbf{E}} + \mathbf{e} \mathbf{e}^{-1} \mathbf{e} \\ \mathbf{\kappa} &= -\mathbf{e} \mathbf{e}^{-1}\end{aligned}\quad (3.63)$$

Dans le cas où le matériau piézoélectrique est polarisé suivant  $y$ , la matrice  $\mathbf{e}$  se met sous la forme :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{112} \\ e_{211} & e_{222} & e_{233} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{323} & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (3.64)$$

A partir de l'équation (3.63), le tenseur de couplage électro-mécanique  $\mathbf{\kappa}$  peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{112} \\ \kappa_{211} & \kappa_{222} & \kappa_{233} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{323} & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (3.65)$$

L'hypothèse de contraintes planes ( $t_{31} = t_{32} = t_{33} = 0$ ) permet de déduire les équations :

$$\begin{aligned}C_{55}^{\mathbf{E}} s_{31} &= 0 \\ C_{44}^{\mathbf{E}} s_{32} + \kappa_{233} d_3 &= 0 \\ C_{31}^{\mathbf{E}} s_{11} + C_{32}^{\mathbf{E}} s_{22} + C_{33}^{\mathbf{E}} s_{33} &= \kappa_{233} d_2\end{aligned}\quad (3.66)$$



### 3. Méthode des éléments finis pour les comportements couplés

---

L'équation (3.66) permet donc de décrire la déformation suivante  $z$  en fonction des déformations et de l'induction magnétique dans le plan de travail.

$$\begin{aligned} s_{31} &= 0 \\ s_{32} &= -\frac{\kappa_{233}}{C_{44}^{\mathbf{E}}} d_3 \\ s_{33} &= -\frac{\kappa_{233}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} d_2 - \frac{C_{31}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} s_{11} - \frac{C_{32}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} s_{22} \end{aligned} \quad (3.67)$$

La loi de comportement piézoélectrique se divise alors en deux parties : une partie dans le plan de travail et une partie perpendiculaire au plan de travail.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \mathbb{C}_{\perp}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \mathbb{K}_{\parallel} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{pmatrix} \\ e_3 &= \epsilon_{\perp}^{-1} d_3 \end{aligned} \quad (3.68)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\perp}^{-1} &= \begin{bmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} - \kappa_{233} \frac{\kappa_{233}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} \end{bmatrix} \\ \mathbb{K}_{\parallel} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa_{112} \\ \kappa_{211} - \kappa_{233} \frac{C_{3311}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} & \kappa_{222} - \kappa_{233} \frac{C_{32}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} & 0 \end{bmatrix} \\ \epsilon_{\perp} &= \epsilon^{-1} - \kappa_{323} \frac{\kappa_{233}}{C_{44}^{\mathbf{E}}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

La contrainte dans le plan de travail peut se calculer en fonction de la déformation et de l'induction électrique dans le plan de travail comme suit :

$$\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{12} \end{pmatrix} = \mathbb{C}_{\parallel}^{\mathbf{D}} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{pmatrix} + \mathbb{K}_{\parallel}^t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

avec

$$\mathbb{C}_{\parallel}^{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\mathbf{E}} - C_{13}^{\mathbf{E}} \frac{C_{13}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} & C_{12}^{\mathbf{E}} - C_{13}^{\mathbf{E}} \frac{C_{32}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} & 0 \\ C_{21}^{\mathbf{E}} - C_{23}^{\mathbf{E}} \frac{C_{13}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} & C_{22}^{\mathbf{E}} - C_{23}^{\mathbf{E}} \frac{C_{32}^{\mathbf{E}}}{C_{33}^{\mathbf{E}}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

La loi de comportement électro-mécanique devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\parallel} &= \mathbb{C}_{\parallel}^{\mathbf{D}} \mathbf{S} + \mathbb{K}_{\parallel}^t \mathbf{D}_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbb{K}_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel} + \mathbb{C}_{\parallel}^{-1} \mathbf{D}_{\parallel} \\ e_{\perp} &= \epsilon_{\perp}^{-1} d_{\perp} \end{aligned} \quad (3.72)$$

A un point de polarisation, le matériau magnétostrictif est polarisé dans notre cas principalement suivant  $x$ , la matrice de couplage peut se simplifier :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_{111} & q_{122} & q_{133} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{212} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{331} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

En utilisant le même développement que précédemment, la loi de comportement magnéto-mécanique obtenue s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\parallel} &= \mathbf{c}_{\parallel}^{\mathbf{B}} \mathbf{S} + \mathbf{q}_{\parallel}^{\mathbf{t}} \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{H}_{\parallel} &= \mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel} + \nu_{\parallel} \mathbf{B}_{\parallel} \\ h_{\perp} &= \nu_{\perp}^{-1} b_{\perp} \end{aligned} \quad (3.74)$$

### Formulation

La formulation éléments finis électromagnétique est calculée dans ce cas à partir de deux équations de Maxwell :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.75)$$

Le problème est 2D, les variables ne dépendent pas de  $z$ , et l'équation (3.75) devient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial e_3}{\partial y} \\ -\frac{\partial e_3}{\partial x} \\ \frac{\partial e_2}{\partial x} - \frac{\partial e_2}{\partial x} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial t} \\ \frac{\partial b_2}{\partial t} \\ \frac{\partial b_3}{\partial t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial h_3}{\partial y} \\ -\frac{\partial h_3}{\partial x} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial t} \\ \frac{\partial d_2}{\partial t} \\ \frac{\partial d_3}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

L'équation (3.76) peut être divisée en deux parties : une partie dans le plan avec deux premières composantes et une partie avec les composantes perpendiculaire au plan de travail. En régime harmonique, les équations (3.76) deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^* \mathbf{grad}_{\parallel} \mathbf{E}_{\perp} &= -j\omega \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{r}^* \mathbf{grad}_{\parallel} h_{\perp} &= \sigma \mathbf{E}_{\parallel} + j\omega \mathbf{D}_{\parallel} \\ \text{div}_{\parallel}(\mathbf{r}^* \mathbf{E}_{\parallel}) &= -j\omega b_{\perp} & \text{div}_{\parallel}(\mathbf{r}^* \mathbf{H}_{\parallel}) &= \sigma e_{\perp} + j\omega d_{\perp} \end{aligned} \quad (3.77)$$

A partir de l'équation (3.77) et des lois de comportement (3.72) et (3.74), le champ magnétique dans le plan  $\mathbf{H}_{\parallel}$  peut s'exprimer en fonction de la déformation dans le plan  $\mathbf{S}_{\parallel}$  et du champ électrique  $e_{\perp}$  suivant  $z$ . Le champ électrique dans le plan  $\mathbf{E}_{\parallel}$  peut lui s'exprimer en fonction de la déformation dans le plan  $\mathbf{S}_{\parallel}$  et du champ magnétique  $h_{\perp}$  suivant  $z$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\parallel} &= -\frac{1}{j\omega} \nu_{\parallel} \mathbf{r}^* \mathbf{grad}_{\parallel} e_{\perp} - \mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\parallel} &= \frac{1}{j\omega} \mathbf{r}^* (\mathbf{c}_{\parallel} + \frac{\sigma}{j\omega} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{r}^* \mathbf{grad}_{\parallel} h_{\perp} - \mathbf{r}^* \mathbf{K}_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel} \end{aligned} \quad (3.78)$$

En écrivant  $a^* = -\frac{e_\perp}{j\omega}$  et  $t^* = -\frac{h_\perp}{j\omega}$  ( $e_\perp$  et  $h_\perp$  qui sont les champs électrique et magnétique suivant  $z$  sont des grandeurs scalaires), à partir des équations (3.77) et (3.78), le système à résoudre s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{div}_\parallel (\mathbb{r}^* (\mathbb{e}_\parallel + \frac{\sigma}{j\omega} \mathbb{I})^{-1} \mathbb{r}^* \mathbf{grad} t^* - \mathbb{r}^* \mathbb{k}_\parallel \mathbf{S}_\parallel) &= \omega^2 \mathbb{v}_\perp^{-1} t^* \\ \text{div}_\parallel (\mathbb{r}^* \mathbb{v}_\parallel \mathbb{r}^* \mathbf{grad} a^* - \mathbb{r}^* \mathbb{q}_\parallel \mathbf{S}_\parallel) &= (-j\omega\sigma + \omega^2 \mathbb{e}_\perp) a^* \end{aligned} \quad (3.79)$$

En utilisant les variables  $a^*$ ,  $t^*$  et la déformation dans le plan  $\mathbf{S}_\parallel$ , à partir de l'équation d'équilibre mécanique (2.9) et des lois de comportement (3.72) et (3.74), l'équation mécanique à résoudre pour le matériau piézoélectrique est finalement :

$$\text{div}_\parallel (\mathbb{c}_\parallel^D \mathbf{S}_\parallel - \mathbb{k}_\parallel \mathbb{r}^* \mathbf{grad} t^*) = -\mathbf{f} \quad (3.80)$$

et l'équation mécanique à résoudre pour le matériau magnétostrictif s'écrit :

$$\text{div}_\parallel (\mathbb{c}_\parallel \mathbf{S}_\parallel - \mathbb{q}_\parallel \mathbb{r}^* \mathbf{grad} a^*) = -\mathbf{f} \quad (3.81)$$

La formulation éléments finis est détaillée dans l'annexe C. Le système éléments finis à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{uu} & \mathbb{K}_{up} & \mathbb{K}_{ua} \\ \mathbb{K}_{pu} & \mathbb{K}_{pp} & 0 \\ \mathbb{K}_{au} & 0 & \mathbb{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ a^* \\ t^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

### 3.3.2 Comparaisons

Les résultats obtenus avec la nouvelle formulation utilisant  $\mathbf{u}$ ,  $t^*$  et  $a^*$  comme variables sont présentés sur les figures 3.9 et 3.10. La comparaison a été réalisée sur  $\mathbf{B}_\parallel$  et  $b_z$ . En effet, nous n'avons pas accès directement avec la nouvelle formulation à la différence de potentiel électrique entre les deux électrodes. A ce sujet, quelques développements complémentaires seraient nécessaires. Dans la nouvelle formulation, la prise en compte des électrodes est considérée en doublant le nombre d'inconnues pour la variable  $t^*$  et en imposant une condition de Neumann sur cette variable. Ce qui revient à supposer que le champ électrique tangentiel est nul à la surface de l'électrode.

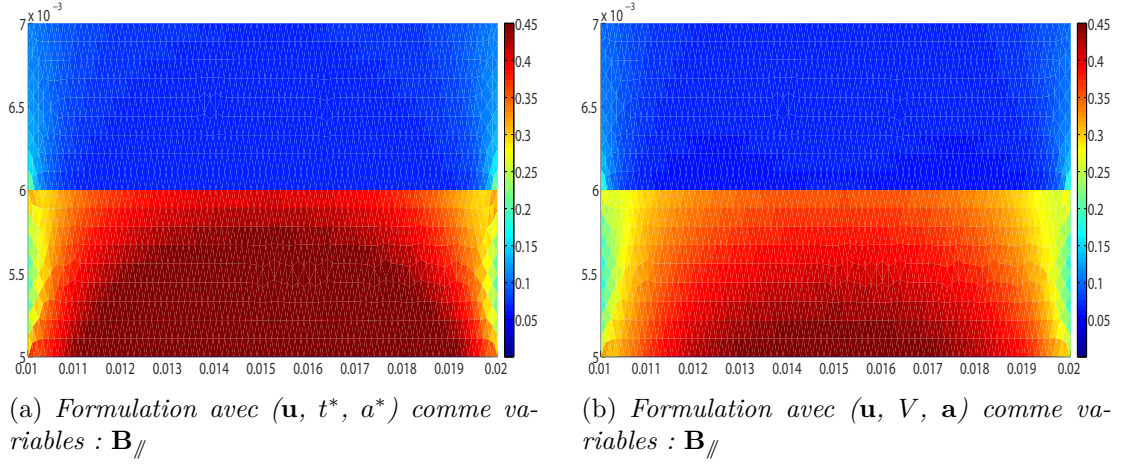


Figure 3.9 – Induction magnétique à la fréquence 10 Hz

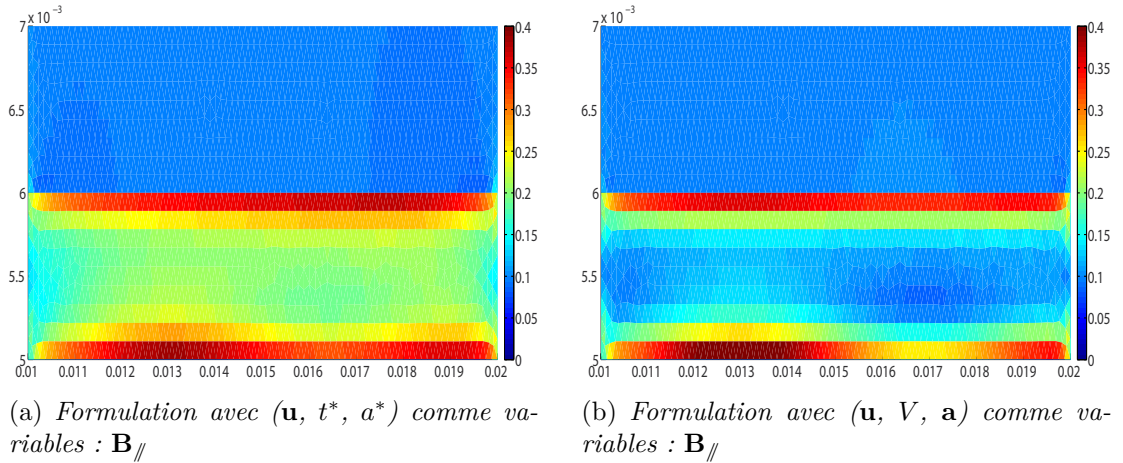


Figure 3.10 – Induction magnétique à la fréquence 100 kHz

Les deux formulations fournissent deux résultats très similaires en basses fréquences. Cependant, la formulation utilisant  $\mathbf{a}$  et  $V$  comme variables ne nous permet pas de calculer l'induction magnétique et le champ magnétique suivant  $z$ . Grâce à la nouvelle formulation, nous pouvons vérifier l'importance de l'induction magnétique suivant  $z$  (figure 3.11).

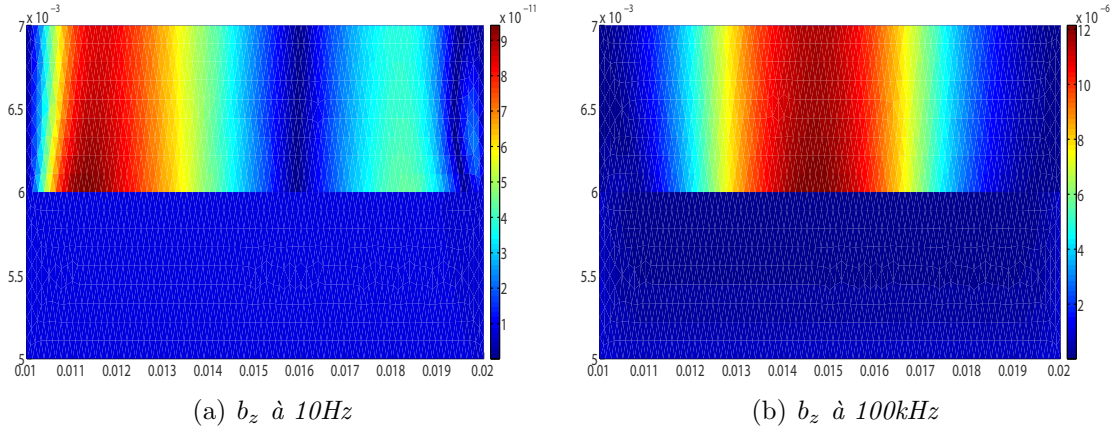


Figure 3.11 – *Formulation complète : induction magnétique suivant  $z$*

Nous pouvons conclure avec ces résultats que dans la gamme d'utilisation de notre modèle (de 0Hz à quelques centaines kHz), l'induction magnétique (donc le courant induit) suivant  $z$  restent faibles devant celles dans le plan de travail (de l'ordre de  $10^{-10}$  de moins). Ceci nous permet de continuer à travailler avec la formulation précédente ( $\mathbf{a}$  et  $V$  comme variables).

La formulation précédente considère le potentiel électrique  $V$  comme un inconnu à résoudre. Les électrodes aux bords de l'élément piézoélectrique peuvent se créer facilement en imposant les potentiels électriques de chaque bord de l'élément piézoélectrique comme une seule inconnue.

## 3.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons détaillé les hypothèses considérées dans le modèle éléments finis 2D. Pour le problème mécanique, l'hypothèse des contraintes planes est la plus adaptée pour les dispositifs dont la modélisation est envisagée. Les contraintes suivant  $z$  sont alors négligées. Pour le problème électromagnétique, les variables d'état sont considérées indépendantes de  $z$ . Dans une première approche, nous avons négligé totalement l'induction magnétique suivant  $z$  ainsi que les courants de déplacement. Avec ces hypothèses, nous avons continué à utiliser le potentiel vecteur magnétique suivant  $z$ , le potentiel scalaire électrique  $V$  et le déplacement dans le plan  $\mathbf{u}$  comme inconnues. Le modèle a été appliqué sur deux structures simples bilames et trilames sollicitées à différentes fréquences. Nous avons observé l'effet de peau pour des fréquences élevées.

Afin de valider les hypothèses utilisées pour cette approche, une formulation 2D complète mais plus contraignante a été proposée. Dans cette formulation, les contraintes sont supposées planes et les variables d'état indépendantes par rapport à  $z$ . Les inconnues pour le problème éléments finis 2D sont alors les déplacements

dans le plan  $\mathbf{u}$ , le champ magnétique suivant  $z$  et le champ électrique suivant  $z$ . Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la première approche. Ils nous permettent de justifier l'utilisation de la première approche pour des fréquences jusqu'à quelques centaines de kHz.

L'application de l'approche proposée à des dispositifs moins académiques à base des matériaux ME fait l'objet du dernier chapitre.



# Chapitre 4

## Applications

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Inductance Variable . . . . .</b>	<b>77</b>
4.1.1	Description du dispositif . . . . .	77
4.1.2	Lois de comportement . . . . .	78
4.1.3	Analyse numérique et validation expérimentale . . . . .	78
<b>4.2</b>	<b>Capteur magnétique . . . . .</b>	<b>81</b>
4.2.1	Description du dispositif . . . . .	81
4.2.2	Analyse numérique du capteur et comparaison expérimentale	86
4.2.3	Conclusion . . . . .	95

---





Le chapitre précédent a présenté la modélisation par éléments finis de l'effet magnéto-électrique. La méthode utilisée consiste à traiter séparément deux problèmes de couplage magnéto-mécanique et électro-mécanique. Cet outil numérique nous a permis d'analyser des structures composites bilames et trilames en régime harmonique. Le point de fonctionnement du matériau magnétostrictif dans ce cas est sollicité autour d'un point de polarisation, les coefficients de couplage obtenus à partir des expressions (2.56) sont donc fixés.

Dans ce chapitre, les applications visées sont deux dispositifs innovants : une inductance variable et un capteur magnétique à base de matériaux composites magnéto-électriques. Ces dispositifs fonctionnent grâce à la non linéarité des matériaux magnétostrictifs. Pour chacun des dispositifs des résultats numériques sont comparés avec ceux de l'expérimentation afin de valider le modèle proposé.

## 4.1 Inductance Variable

### 4.1.1 Description du dispositif

L'inductance variable à base de matériaux ME est constituée d'une structure composite de type trilame entourée par une bobine. Il est possible de faire varier la valeur de l'inductance de cette bobine par application d'un champ électrique statique, obtenu en imposant une tension continue entre les électrodes du matériau piézoélectrique. Le dispositif typique à modéliser est un trilame présenté sur la figure 4.1(a).

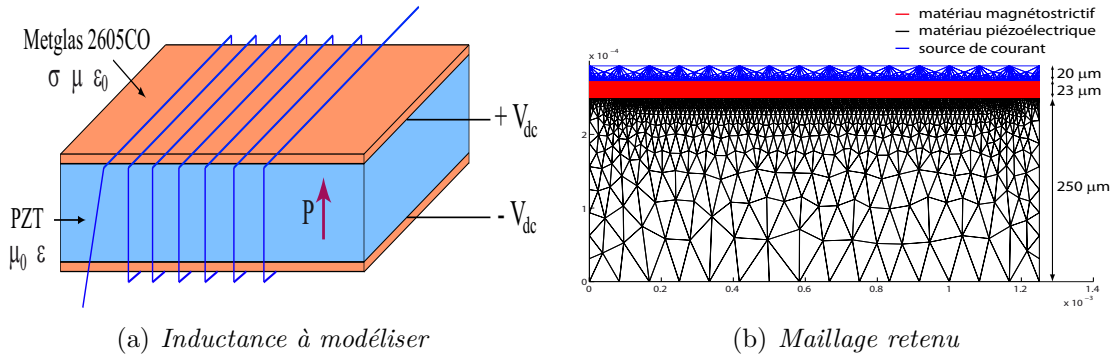


Figure 4.1 – *Domaine d'étude de l'inductance variable*

En raison de la symétrie de la géométrie du dispositif, l'étude peut être faite avec un quart de la structure. En pratique, l'élément piézoélectrique est environ dix fois plus épais que les deux lames magnétostrictives de Metglas. La présence de la bobine est alors matérialisée dans la simulation par deux nappes de courant.

Sous l'effet d'un champ électrique, l'élément piézoélectrique se déforme, ce qui conduit également à une déformation des éléments magnétostrictifs. Les contraintes engendrées modifient la perméabilité magnétique du Metglas, et donc la valeur de

l'inductance de la bobine.

De plus, lorsque la fréquence de travail augmente, la valeur de l'inductance change par la présence l'effet de peau. Le but de la modélisation est donc de récupérer ces deux effets.

### 4.1.2 Lois de comportement

Dans le chapitre 2, des lois de comportement ont été introduites. Il y a deux possibilités proposées pour approximer la déformation de magnétostriction : un modèle en  $\mathbf{B}^2$  ou en  $\mathbf{M}^2$ . Le modèle en  $\mathbf{B}^2$  a été retenu pour modéliser l'inductance variable. Les lois de comportement (2.56) se simplifient à partir de l'équation (2.56). En effet, il n'y a pas d'induction magnétique statique appliquée, d'où :  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  (polarisation magnétique nulle). La contrainte  $\mathbf{T}^\mu$  est proportionnelle à  $\mathbf{B}^2$  ( $\mathbf{T}^\mu = \alpha \mathbf{B}^2$ ), d'où :  $\frac{\partial \mathbf{T}^\mu}{\partial \mathbf{B}} = 2\alpha \mathbf{B} = \mathbf{0}$ . L'équation (2.56)

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{ij} &= C_{ijkl}^{ms} \tilde{s}_{kl} - \frac{\partial t_{ij}^\mu}{\partial b_k} \tilde{b}_k \\ \tilde{h}_i &= -\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \tilde{s}_{kl} + \left[ \frac{\partial \nu_{ik} b_k}{\partial b_j} - \frac{\partial^2 t_{kl}^\mu}{\partial b_i \partial b_j} (s_{kl} - s_{kl}^\mu) + \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \frac{\partial s_{kl}^\mu}{\partial b_j} \right] \tilde{b}_j\end{aligned}\quad (4.1)$$

devient donc :

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{ij} &= C_{ijkl}^{ms} \tilde{s}_{kl} \\ \tilde{h}_i &= \left[ \frac{\partial \nu_{ik} b_k}{\partial b_j} - \frac{\partial^2 t_{kl}^\mu}{\partial b_i \partial b_j} (s_{kl} - s_{kl}^\mu) \right] \tilde{b}_j\end{aligned}\quad (4.2)$$

L'équation (4.2) montre que les lois de comportement linéarisées sont découplées : la contrainte  $\tilde{t}$  ne dépend que de la déformation élastique  $\tilde{s}$  et le champ magnétique  $\tilde{h}$  dépend de l'induction magnétique  $\tilde{b}$ .

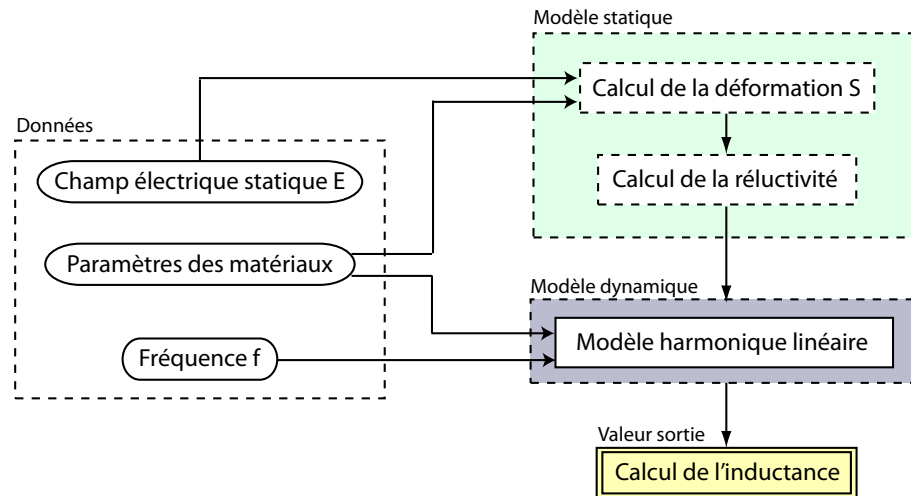
Dans le cas bidimensionnel, la matrice de réductivité équivalente dans l'équation (4.2) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbb{v} = \begin{bmatrix} \nu_{11} + 2\mu^* \beta_0 (2s_{11} - s_{22}) & 6\mu^* \beta_0 s_{12} \\ 6\mu^* \beta_0 s_{21} & \nu_{22} + 2\mu^* \beta_0 (2s_{22} - s_{11}) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

L'équation (4.3) montre la dépendance de la réductivité apparente vis à vis de la déformation. Cette formulation va être utilisée pour la suite de cette partie.

### 4.1.3 Analyse numérique et validation expérimentale

L'inductance variable que l'on va modéliser a été étudiée expérimentalement par [Lou *et al.*, 2009]. Le modèle numérique doit nous permettre de comprendre le phénomène et de reproduire les résultats expérimentaux. L'algorithme de l'approche numérique est présenté sur la figure 4.2.

Figure 4.2 – *Algorithme de calcul de l'inductance équivalente*

Il y a deux parties principales présentées dans cet algorithme : le premier calcul statique permet de déterminer la réluctivité de l'élément magnétostrictif lors de l'application du champ électrique statique. La deuxième partie traite l'influence de la fréquence de travail sur les valeurs de l'inductance. Nous avons retenu pour l'étude le jeu de paramètres suivants (tableau 4.1) :

Matériau piézoélectrique			
Coefficient d'élasticité	$c_{11}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	7.97
	$c_{12}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	3.58
	$c_{22}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	6.68
	$c_{44}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	0.57
Constantes électriques	$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	-	15.92
	$\epsilon_{22}/\epsilon_0$	-	15.92
Constantes piézoélectriques	$\alpha_{11}$	$(\text{C/m}^2)$	-5.9
	$\alpha_{22}$	$(\text{C/m}^2)$	15.2
	$\alpha_{55}$	$(\text{C/m}^2)$	10.5
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	1
Matériau magnétostrictif			
Coefficients d'élasticité	$\mu^*$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	3.11
	$\lambda^*$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	1.52
Constante électrique	$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	-	5
Constante de magnétostriction	$\beta_0$	-	156.8
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	15000

Tableau 4.1 – Paramètres matériaux utilisés pour l'inductance variable

Le matériau magnétostrictif est du Metglas avec une perméabilité élevée et une faible conductivité ( $10^6 \text{ S/m}$ ). La figure 4.3 illustre l'effet de peau : lorsque la struc-

#### 4. Applications

ture est soumise à un champ magnétique harmonique, en basse fréquence, l'induction  $\mathbf{B}$  est homogène sur toute la surface du matériau magnétostrictif. En revanche, lorsque la fréquence est élevée l'induction se concentre sur la frontière haute du matériau.

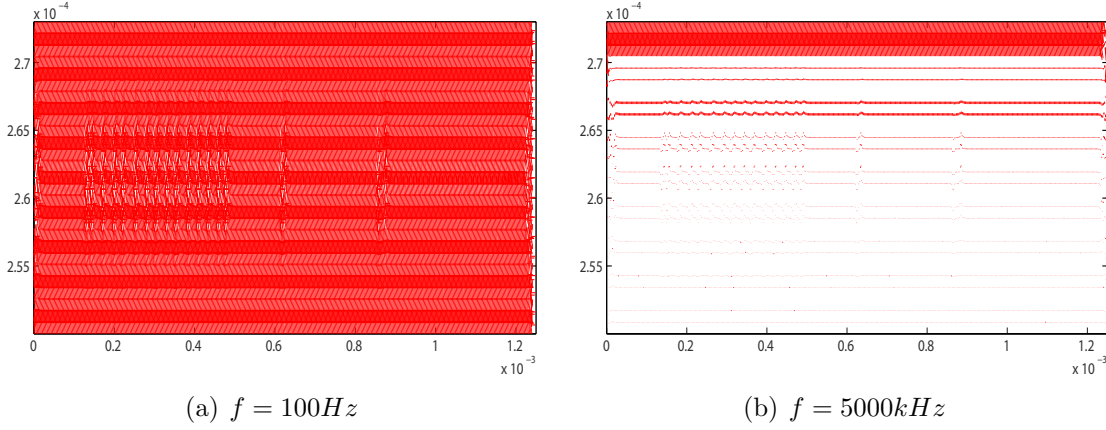


Figure 4.3 – Distribution de l'induction magnétique dans le trilame

Ce phénomène explique la diminution de l'inductance lorsque la fréquence appliquée est élevée, le flux de  $\mathbf{B}$  étant limité par la surface de passage.

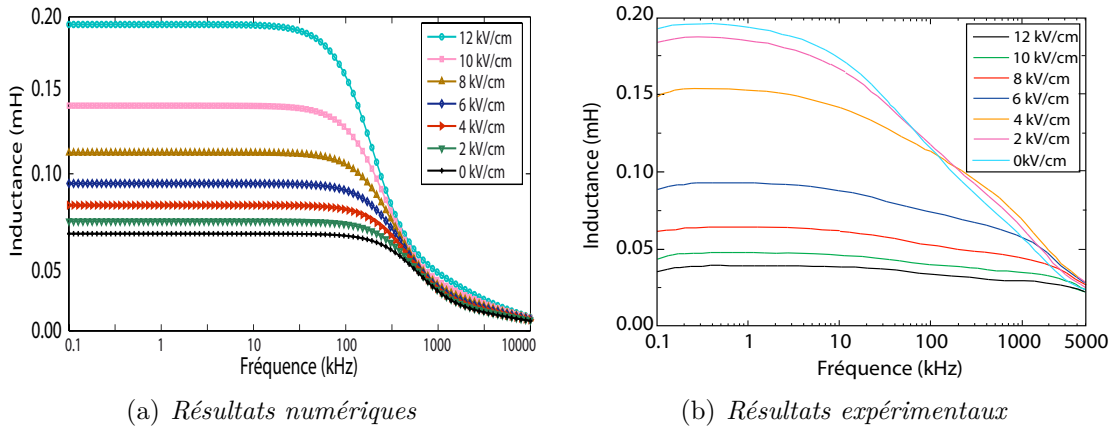


Figure 4.4 – Evolution de l'inductance en fonction de la fréquence pour différentes sollicitations électriques. Résultats numériques (a) et expérimentaux (b)

Le coefficient magnétostrictif est choisi pour avoir la même valeur de l'inductance à basse fréquence lorsque le champ électrique appliqué est de 12 kV/cm. Les résultats numériques obtenus ont une allure proche de celle des résultats expérimentaux. Qualitativement, les deux effets recherchés sont bien pris en compte. Ces résultats montrent l'effet des courants de Foucault qui font diminuer l'inductance quand la fréquence de travail augmente. Cependant, la diminution de l'inductance

arrive pour des fréquences plus faibles expérimentalement par rapport au modèle numérique. La valeur de l'inductance en fonction du champ électrique appliqué est présenté sur la figure 4.5. L'augmentation du champ électrique appliqué conduit à une augmentation de la déformation de magnétostriction, qui entraîne à une diminution de la perméabilité. Le maximum d'accordabilité obtenue atteint 210 % sous régime quasi-statique.

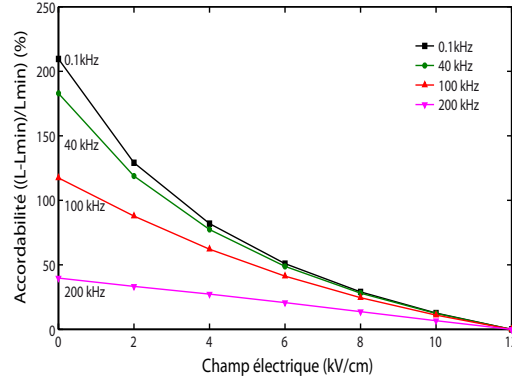


Figure 4.5 – Accordabilité de l'inductance variable

Le modèle nous a donc permis de capturer les mécanismes principaux du fonctionnement d'une inductance variable. Une autre application possible est le capteur de champ magnétique à base de matériaux magnéto-électriques présenté par la suite, pour lequel les conditions de polarisations sont différentes du cas de l'inductance [Nguyen *et al.*, 2011b]. La partie suivante expose la modélisation correspondante.

## 4.2 Capteur magnétique

L'association de matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques peut fournir un capteur de champ magnétique. Ce capteur à base des matériaux composites magnéto-électriques travaillant à la fréquence de résonance de sa structure permet d'avoir un potentiel électrique élevé pour de faibles variations de champ magnétique.

### 4.2.1 Description du dispositif

Le capteur de champ magnétique est constitué de couches magnétostrictives et piézoélectriques entourées par une bobine qui fournit un champ magnétique dynamique additionnel à la fréquence de résonance de la structure et de faible amplitude. Ce dispositif a été mis en place par exemple au Laboratoire de Micro et Nanotechnologies de l'Université de Technologie à Hanoi, Vietnam (figure 4.6(a)). La figure 4.6(b) représente la géométrie du capteur utilisée pour la modélisation.

## 4. Applications

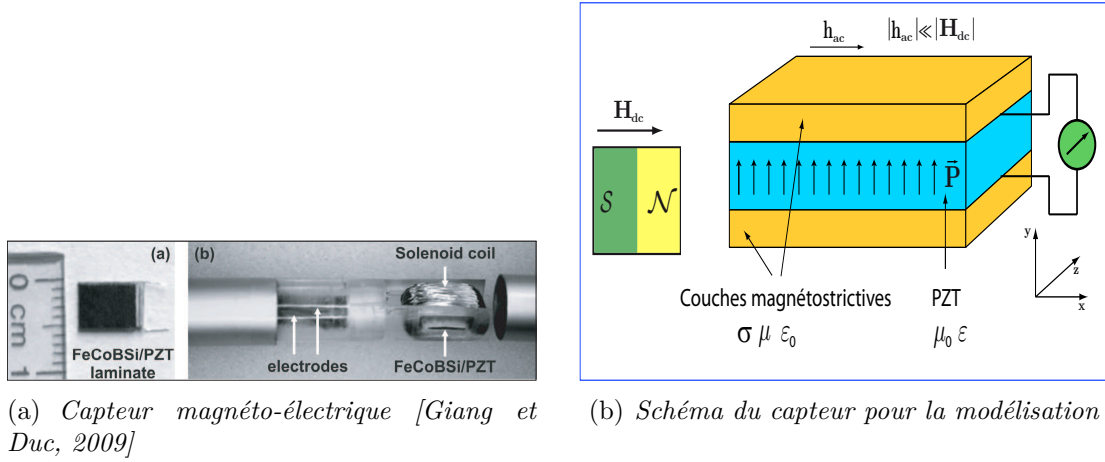


Figure 4.6 – Capteur de champ magnétique ME

Le champ magnétique statique à mesurer définit le point de polarisation du matériau magnétostrictif. Grâce au champ dynamique appliqué, le potentiel électrique obtenu s'amplifie et renvoie l'information concernant le champ magnétique statique. Nous allons montrer par la suite que ceci s'explique par la non-linéarité de l'effet de magnétostriction.

Les configurations et domaines d'étude du capteur sont présentés sur la figure 4.7. Il s'agit de structures bilame et trilame.

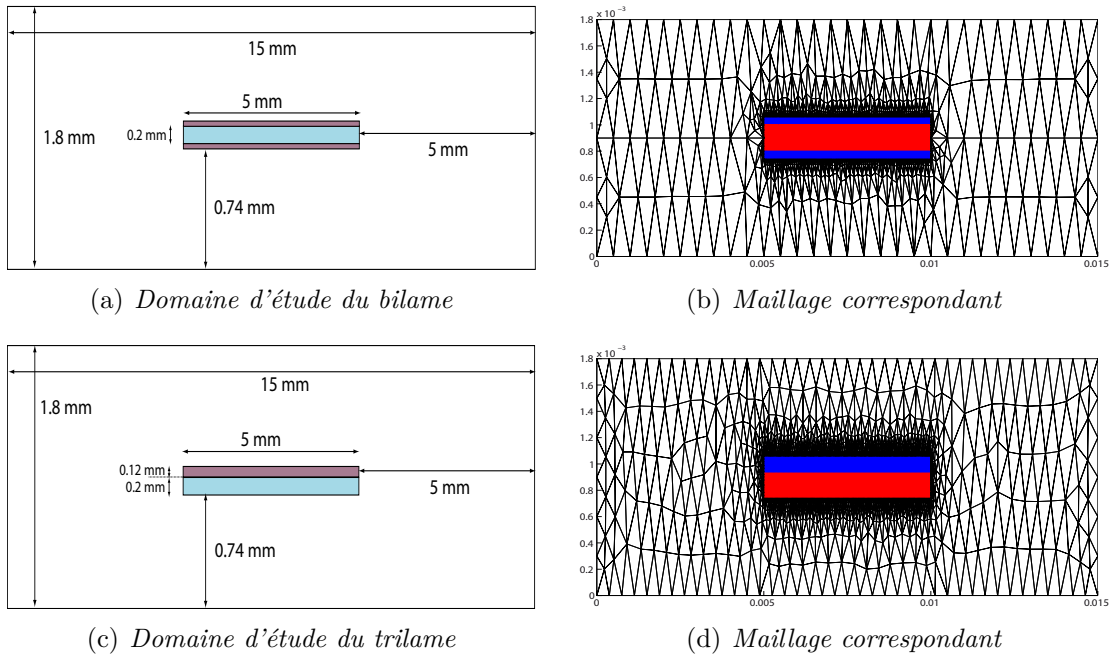


Figure 4.7 – Domaines d'étude et maillage correspondant des structures composites

### Lois de comportement

Dans le chapitre 2, la loi de comportement magnéto-mécanique a été présentée avec deux possibilités : la déformation de magnétostriction  $\mathbf{S}^\mu$  peut être considérée comme une fonction quadratique de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  ou de l'aimantation magnétique  $\mathbf{M}$ . Lorsque le champ magnétique augmente, l'aimantation et l'induction magnétique tendent vers la zone de saturation. Si le champ magnétique augmente encore, l'induction magnétique continue à augmenter même dans la zone de saturation tandis que l'aimantation se stabilise à une valeur. Le modèle avec la déformation de magnétostriction  $\mathbf{S}^\mu$  en  $\mathbf{B}^2$  donne un résultat insuffisant pour le capteur car  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{B}} \propto \mathbf{B}$ , d'où les coefficients de couplage magnéto-mécanique ne cessent pas à augmenter. Ceci conduit à une augmentation de la tension à l'infini lorsque le champ magnétique tend vers l'infini. En réalité, la tension augmente dans un premier temps, ensuite diminue et s'annule à l'infini. Le modèle avec la déformation de magnétostriction  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{M}^2$  nous convient pour expliquer le fonctionnement du capteur. L'équation (2.56) dans la configuration du capteur sans déformation initiale  $s_{kl} - s_{kl}^\mu = 0$  devient :

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{ij} &= C_{ijkl}^{ms} \tilde{s}_{kl} - \frac{\partial t_{ij}^\mu}{\partial b_k} \tilde{b}_k \\ \tilde{h}_i &= -\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \tilde{s}_{kl} + \left[ \frac{\partial \nu_{ik} b_k}{\partial b_j} + \frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} \frac{\partial s_{kl}^\mu}{\partial b_j} \right] \tilde{b}_j\end{aligned}\tag{4.4}$$

où :

$$\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i} = \frac{\mu^* \beta_0}{\mu_0^2} \left[ \frac{\partial (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2)}{\partial b_i} \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2} + (3b_k b_l - \delta_{kl} \|\mathbf{B}\|^2) \frac{\partial \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{b_i}{\|\mathbf{B}\|} \right]$$

Les termes de couplage sont calculés en fonction de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et l'aimantation  $\mathbf{M}$ . On note pour la suite :

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{\mu^* \beta_0}{\mu_0^2} \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2} \\ \Theta &= \frac{\mu^* \beta_0}{\mu_0^2} \frac{\partial \frac{\|\mathbf{M}\|^2}{\|\mathbf{B}\|^2}}{\partial \|\mathbf{B}\|}\end{aligned}\tag{4.5}$$



#### 4. Applications

---

Dans le cas bidimensionnel, le terme de couplage  $\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial b_i}$  peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\mathfrak{q} = \begin{bmatrix} \Theta \frac{b_1}{\|\mathbf{B}\|} \left( b_1^2 - \frac{b_2^2}{2} \right) + \Psi(2b_1) & \Theta \frac{b_2}{\|\mathbf{B}\|} \left( b_1^2 - \frac{b_2^2}{2} \right) + \Psi(-b_2) \\ \Theta \frac{b_1}{\|\mathbf{B}\|} \left( b_2^2 - \frac{b_1^2}{2} \right) + \Psi(-b_1) & \Theta \frac{b_2}{\|\mathbf{B}\|} \left( b_2^2 - \frac{b_1^2}{2} \right) + \Psi(2b_2) \\ \Theta \frac{b_1}{\|\mathbf{B}\|} \left( \frac{3}{2} b_1 b_2 \right) + \Psi\left(-\frac{3}{2} b_2\right) & \Theta \frac{b_2}{\|\mathbf{B}\|} \left( \frac{3}{2} b_1 b_2 \right) + \Psi\left(-\frac{3}{2} b_1\right) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La perméabilité apparente peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\tilde{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_{11} + \frac{\partial \nu_{11}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{b_1^2}{\|\mathbf{B}\|} & 0 \\ 0 & \nu_{22} + \frac{\partial \nu_{22}}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{b_2^2}{\|\mathbf{B}\|} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Les figures 4.8 et 4.9 tracent l'évolution des coefficients  $q_{11}$ ,  $q_{21}$  et  $q_{31}$  en fonction des composantes  $b_1$  et  $b_2$  du champ  $\mathbf{B}$  à l'intérieur du matériau.

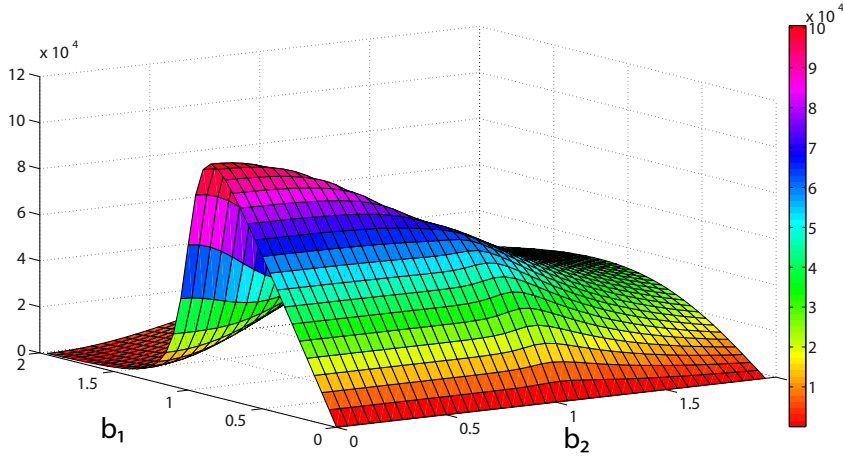
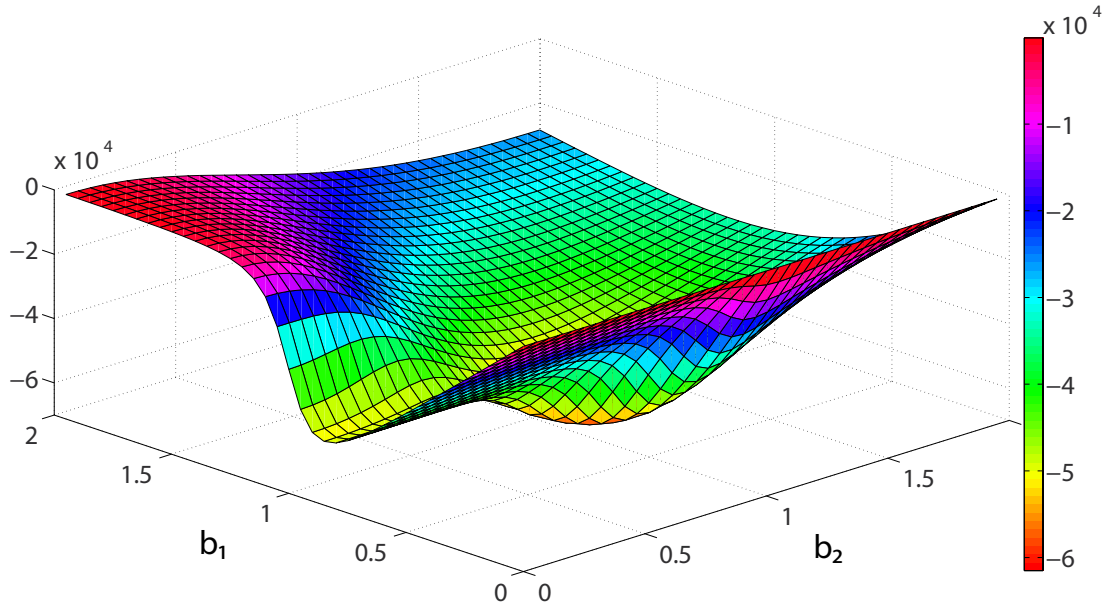
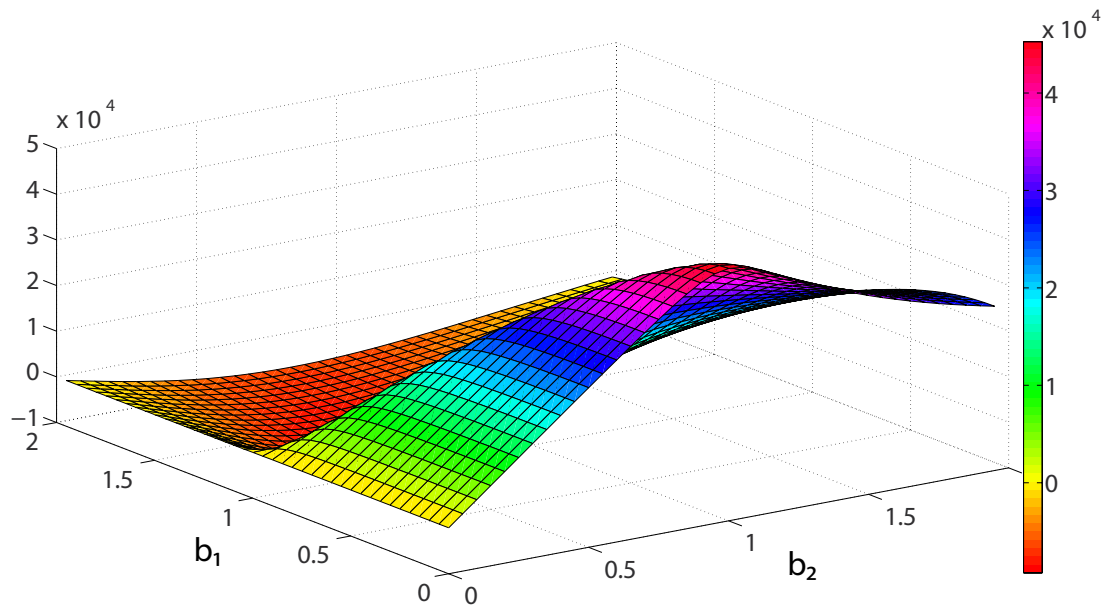


Figure 4.8 – Coefficient  $q_{11}$

La figure 4.8 montre que le coefficient  $q_{11}$  dépend principalement du champ magnétique suivant la direction  $x$ . Comme il existe une symétrie entre les six coefficients de couplage, on peut en déduire que le coefficient  $q_{22}$  dépend principalement du champ magnétique suivant  $y$ .

Figure 4.9 – Coefficient  $q_{21}$ 

La figure 4.9 montre que le coefficient  $q_{21}$  dépend également de  $b_1$  avec une valeur négative. On peut donc en déduire la dépendance de  $q_{12}$  en  $b_2$ .

Figure 4.10 – Coefficient  $q_{31}$ 

Le coefficient  $q_{31}$  dépend fortement de  $b_2$ . Le coefficient  $q_{32}$  dépend donc de  $b_1$ . Les maxima des différents coefficients sont de même d'ordre de grandeur. Il est intéressant pour la suite d'étudier la contribution de chaque coefficient sur la tension

obtenue.

Dans le cas du capteur étudié, l'orientation principale du champ magnétique est suivant  $x$ . Comme les coefficients  $q_{12}$ ,  $q_{22}$  et  $q_{31}$  dépendent très peu de  $b_1$ , les coefficients  $q_{11}$ ,  $q_{21}$  et  $q_{32}$  apporteront les plus fortes contributions pour la tension obtenue.

### 4.2.2 Analyse numérique du capteur et comparaison expérimentale

Le tableau 4.2 résume les caractéristiques des matériaux utilisés.

Matériau piézoélectrique			
Coefficients d'élasticité	$c_{11}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	7.97
	$c_{12}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	3.58
	$c_{22}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	6.68
	$c_{44}$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	0.57
Constantes électriques	$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	-	15.92
	$\epsilon_{22}/\epsilon_0$	-	15.92
Constantes piézoélectriques	$\alpha_{11}$	$(\text{C/m}^2)$	-5.9
	$\alpha_{22}$	$(\text{C/m}^2)$	15.2
	$\alpha_{55}$	$(\text{C/m}^2)$	10.5
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	1
Matériau magnétostrictif			
Coefficients d'élasticité	$\mu^*$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	3.11
	$\lambda^*$	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$	1.52
Constante électrique	$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	-	5
Constante de magnétostriction	$\beta_0$	-	5e-6
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	100

Tableau 4.2 – Description des paramètres des matériaux utilisés pour le capteur de champ magnétique

L'algorithme de l'approche numérique est présenté sur la figure 4.11.

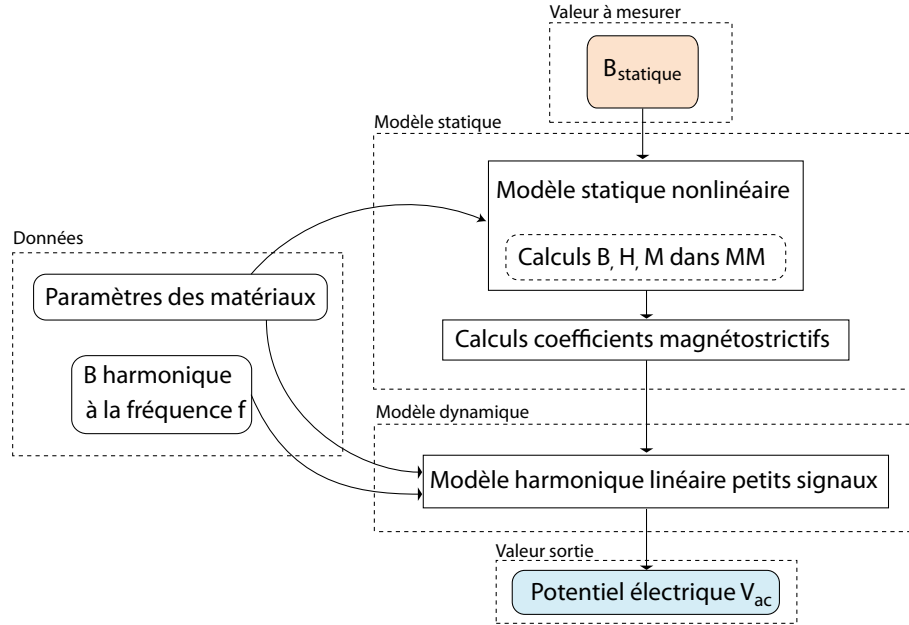


Figure 4.11 – Schéma de résolution numérique pour le problème du capteur

L'algorithme proposé (annexe C) consiste à diviser le problème en deux sous-problèmes traités de manière séquentielle : le premier est un problème statique non linéaire, dont le but est de trouver le champ et l'induction magnétique à l'intérieur de la couche magnétostrictive. Ces grandeurs sont ensuite introduites dans le deuxième problème harmonique linéaire avec les lois de comportement petits signaux pour obtenir le potentiel électrique  $V_{ac}$ .

Les deux structures étudiées possèdent le même volume d'élément piézoélectrique. La structure est symétrique pour le trilame.

Les conditions aux limites mécaniques sont les mêmes dans les deux cas. Les déplacements sont bloqués sur le côté gauche des capteurs :

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Dans un premier temps, on détermine la fréquence de résonance pour chaque structure. A un point de polarisation fixé, l'évolution du potentiel électrique en fonction de la fréquence de travail des deux structures étudiées est montré sur la figure 4.12.

## 4. Applications

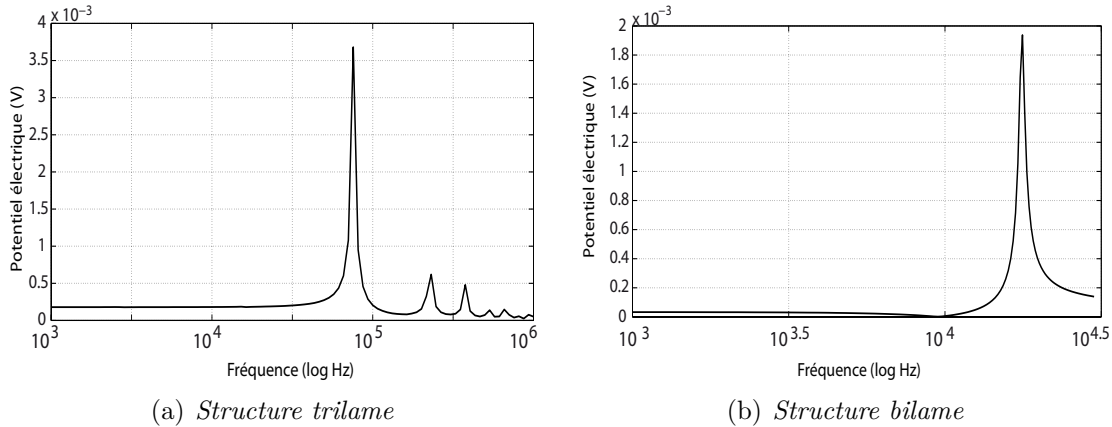


Figure 4.12 – *Evolution de la tension en fonction de la fréquence de travail*

La fréquence de résonance pour le capteur trilame est 75.5 kHz et celle du capteur bilame est 17.7 kHz. La déformation de la structure bilame correspond à la flexion pour la première fréquence de résonance, qui est plus faible que celle du trilame pour lequel la déformation est un allongement. Avec le même coefficient d'amortissement, le potentiel électrique maximum obtenu dans le cas du bilame est ici deux fois moins important que celui du trilame.

Une fois les fréquences de résonance connues, un champ magnétique dynamique à ces fréquences est appliqué. L'évolution du potentiel électrique obtenu en dynamique en fonction du champ magnétique statique appliqué est présentée sur la figure 4.13 [Nguyen *et al.*, a].

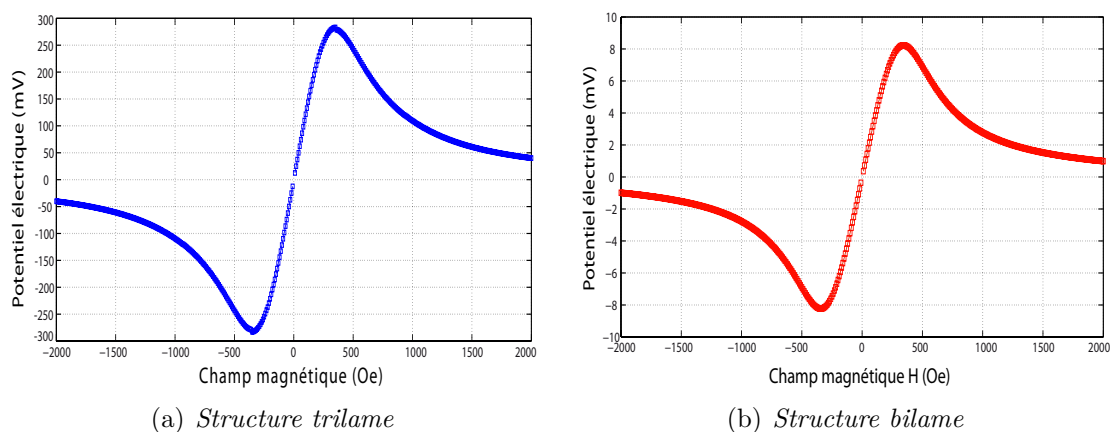
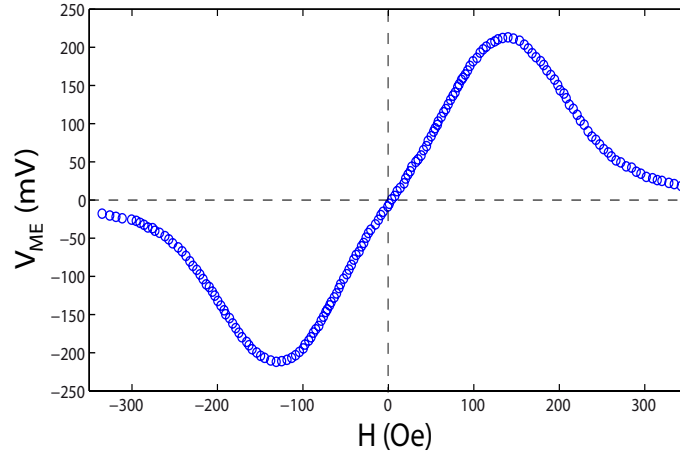


Figure 4.13 – *Évolution du potentiel électrique  $v_{ac}$*

Ces résultats sont très proches du résultat expérimental obtenus par [Giang et Duc, 2009] (figure 4.14) sur une structure proche de notre trilame.

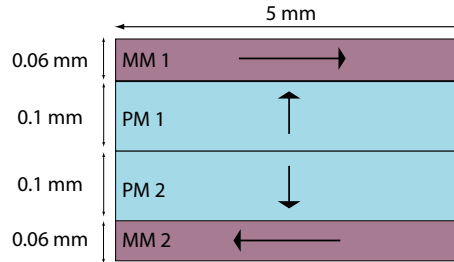
Figure 4.14 – *Résultat expérimental [Giang et Duc, 2009]*

Comme cela est attendu, le potentiel électrique obtenu est beaucoup plus important que celui du problème statique. Ceci peut s'observer en faisant varier la fréquence appliquée loin des fréquences de résonance. Les coefficients magnétoélectriques sont alors très faibles par rapport à ceux obtenus à la fréquence de résonance. L'allure des deux courbes est similaire à l'évolution des coefficients  $q_{11}$  et  $q_{21}$  en fonction de  $B_x$  (les figures 4.8 et 4.9).

Le potentiel électrique obtenu avec la structure trilame est plus important que celui de la structure bilame. Ceci peut s'expliquer par deux raisons :

- le fait que la polarisation du matériau piézoélectrique est suivant  $y$ , certaines coefficients de couplage magnétostrictifs deviennent dominants.
- la structure trilame favorise la déformation suivant  $x$  à la première fréquence de résonance. En revanche, le bilame a une faible déformation suivant  $x$  à la fréquence de résonance, car celle-ci correspond à un mode de flexion.

La structure trilame permet d'obtenir une tension plus importante que celle du bilame encastré, mais pour une fréquence de résonance plus élevée. Fetisov *et al* [Fetisov *et al.*, 2011] ont alors proposé expérimentalement une nouvelle structure qui permet d'avoir une faible fréquence de résonance tout en gardant une tension importante. La structure est présentée par la figure 4.15 :

Figure 4.15 – *Structure proposée par Fetisov et al [Fetisov et al., 2011]*

Cette nouvelle structure est composée de 4 couches avec deux couches piézoélec-

triques dont les polarisations sont inversées. Les deux couches magnétostrictive sont constituées de matériaux différents, présentant des coefficients de magnétostriction de signe différent. Notre modèle est utilisé pour évaluer cette structure. L'évolution du potentiel électrique correspondante est présentée sur la figure 4.16 [Nguyen *et al.*, b]

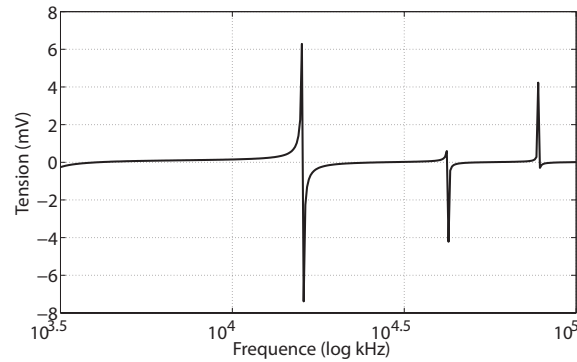


Figure 4.16 – *Evolution de la tension en fonction de la fréquence appliquée*

La figure 4.16 montre que la première fréquence de résonance obtenue est plus faible que pour le trilame initial : elle vaut environ 16kHz, très proche de celle du bilame. Pour cette fréquence, la figure 4.17 trace la tension dynamique obtenue en fonction du champ magnétique statique :

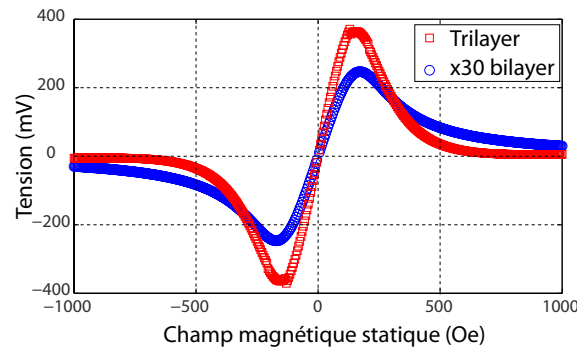


Figure 4.17 – *Comparaison des tensions obtenues pour le bilame et la nouvelle structure*

Ce résultat montre une forte augmentation de la tension obtenue pour la nouvelle structure. Elle présente donc un potentiel électrique comparable à celle du trilame, avec l'avantage d'avoir une faible fréquence de résonance.

### Evolution du potentiel électrique en fonction des propriétés des matériaux

Le modèle proposé doit permettre de déterminer les paramètres à considérer pour optimiser les structures ME. Dans cette partie, l'influence des propriétés des matériaux, comme la perméabilité  $\mu$  et l'aimantation à saturation du matériau magnétostrictif, sur le coefficient de couplage magnétostrictif  $\beta$  est étudiée. La figure 4.18

montre que la sensibilité du capteur est plus élevée dans la gamme de mesure, c'est-à-dire la partie quasi-linéaire si la perméabilité relative du matériau magnétostrictif est forte.

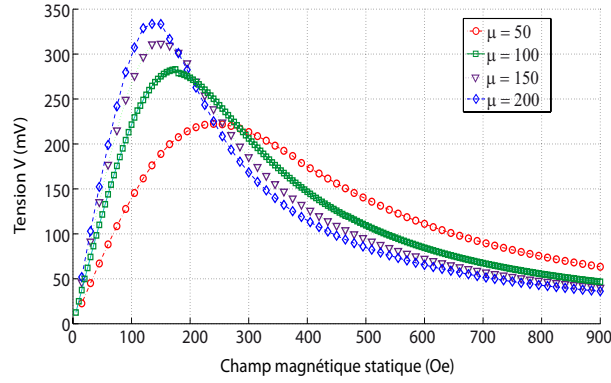


Figure 4.18 – Evolution de la tension  $v_{ac}$  en fonction de la perméabilité relative

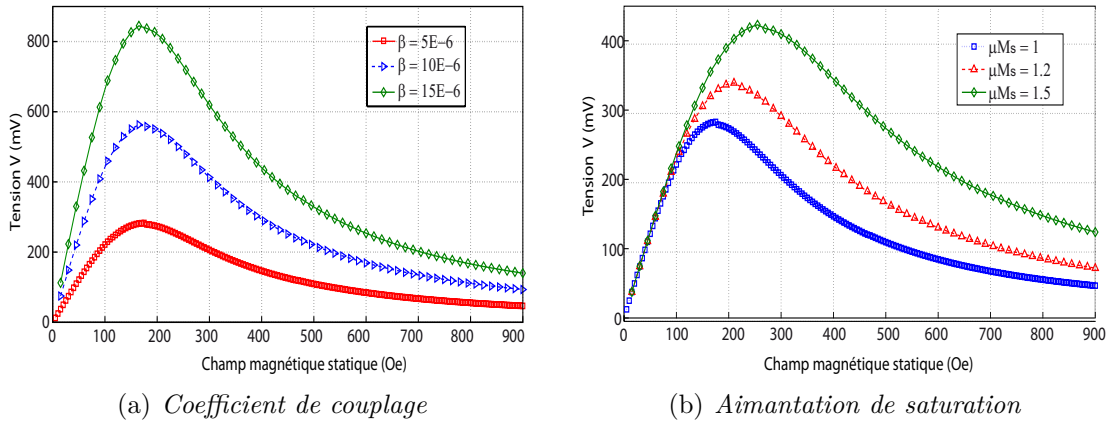


Figure 4.19 – Evolution de la tension en fonction des paramètres  $\beta$  et  $\mu_0 \mathbf{M}_s$

L'augmentation de l'aimantation à saturation permet d'élargir la gamme de mesure sans toucher à la sensibilité du capteur. L'augmentation du coefficient couplage incrémente la sensibilité du capteur.



### Rotation du champ magnétique

La partie précédente a montré que le capteur du champ magnétique à base de matériaux magnéto-électrique permet de mesurer l'amplitude du champ magnétique appliqué perpendiculaire au plan  $(x,y)$  mais il est possible également de mesure l'orientation du champ appliqué.

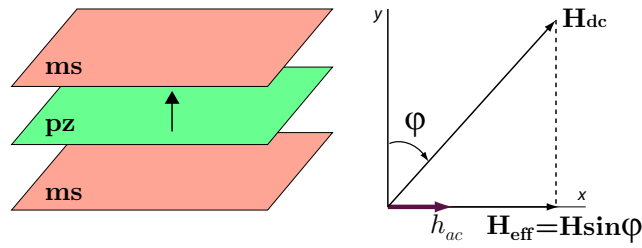


Figure 4.20 – *Orientation du champ magnétique à mesurer*

L'orientation du champ magnétique dynamique  $h_{ac}$  est supposée fixe et suivant la direction perpendiculaire à celle de la polarisation de l'élément piézoélectrique. Le champ magnétique statique  $\mathbf{H}_{dc}$  est incliné par rapport au champ dynamique. L'angle  $\varphi$  est défini comme étant l'angle entre  $\mathbf{H}_{dc}$  et la direction de polarisation de l'élément piézoélectrique [Nguyen *et al.*, 2011a]. Les résultats présentés avec la structure trilame sont l'évolution du potentiel électrique en fonction de l'angle de rotation  $\varphi$  (figure 4.21 à gauche), et l'évolution du potentiel électrique en fonction du champ statique de la composante  $x$  (figure 4.21 à droite).

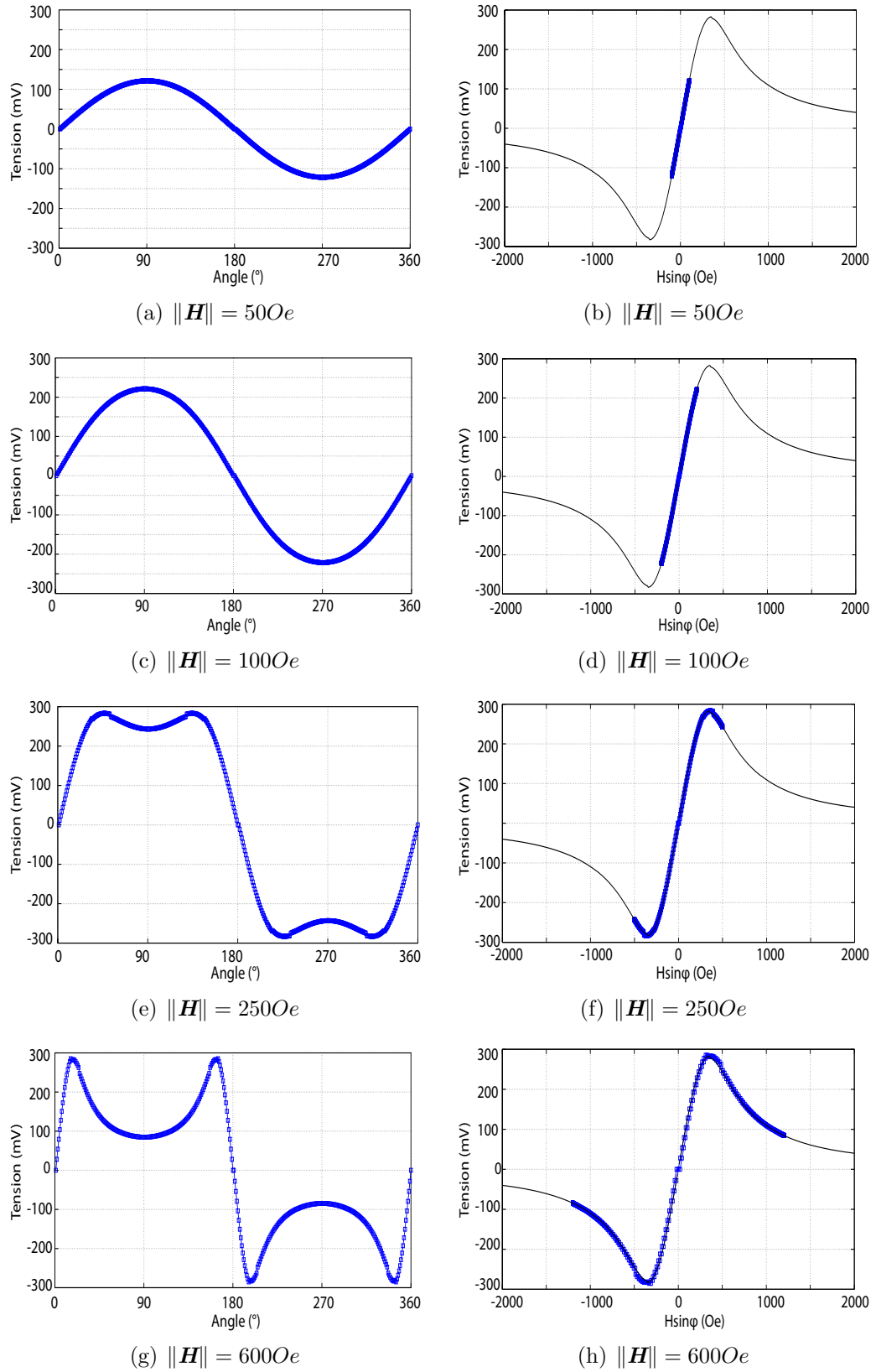


Figure 4.21 – Résultats numériques : évolution du potentiel électrique en fonction de l'orientation et de l'amplitude du champ appliqué

#### 4. Applications

Les résultats numériques sont comparés avec ceux obtenus expérimentalement par Giang *et al* [Giang et Duc, 2009] (figure 4.22). Les deux résultats sont très similaires.

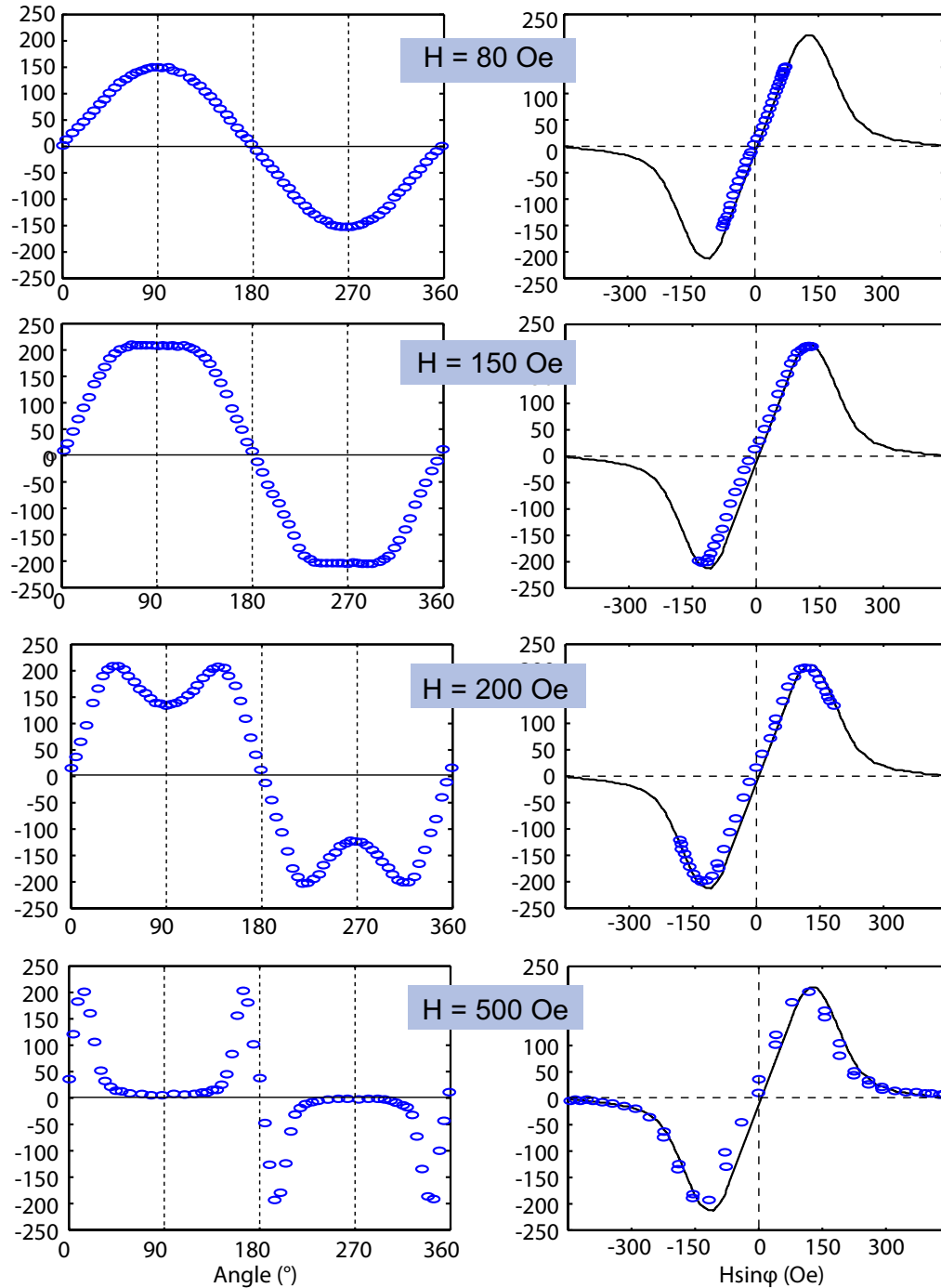


Figure 4.22 – Résultats expérimentaux : évolution du potentiel électrique en fonction de l'orientation et de l'amplitude du champ appliqué

A partir de la figure 4.21, nous déduisons que si l'amplitude du champ magnétique

appliqué à l'extérieur est faible, le potentiel électrique à un angle donné est proportionnel au champ appliqué (zone linéaire). En revanche, lorsque l'induction magnétique à l'intérieur tend vers la zone saturation, l'évolution du potentiel électrique pourra changer. La partie droite de la figure 4.21 montre que le potentiel électrique est proportionnel à la projection du champ magnétique sur l'axe  $x$ . Ceci veut dire que la composante suivant  $x$  du champ magnétique à l'intérieur du matériau magnétostrictif peut se calculer en fonction de l'angle d'orientation :  $H_x = \|\mathbf{H}\| \sin \varphi$ . Ces résultats permettent d'imaginer une combinaison de deux capteurs pouvant mesurer l'amplitude et l'orientation d'un champ magnétique statique dans le plan.

### 4.2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux dispositifs à base de matériaux composites magnéto-électriques. Le premier dispositif est une inductance variable dont la valeur est pilotée par un champ électrique statique. Le champ électrique conduit à une modification de la réductivité apparente du dispositif, ainsi que de la valeur de l'inductance. Afin de modéliser le dispositif, la loi de comportement générale proposée au chapitre 2 est simplifiée en considérant la polarisation propre à ce dispositif. Le schéma de résolution consiste à diviser le problème en deux sous problèmes : un problème couplé magnéto-électro-mécanique statique non-linéaire pour déterminer le point de polarisation du matériau magnétostrictif, et un problème découplé magnétique harmonique pour calculer la valeur de l'inductance en fonction de la fréquence. Les résultats obtenus sont proches qualitativement des résultats expérimentaux. Le champ électrique statique modifie la valeur de l'inductance, et cette valeur change en fonction de la fréquence du champ magnétique dynamique appliqué. Ce résultat nous permet de mieux analyser le fonctionnement du dispositif qui est basé sur la non-linéarité du comportement magnétostrictif.

Le deuxième dispositif étudié est un capteur de champ magnétique. Le capteur est une structure composite entourée par une bobine créant un champ magnétique harmonique additionnel à la fréquence de résonance du dispositif. Le champ statique à mesurer définit le point de polarisation du matériau magnétostrictif. Le champ harmonique de faible amplitude devant le champ statique va amplifier le potentiel électrique obtenu grâce à l'effet de résonance.

A nouveau, la loi de comportement a été simplifiée dans le cadre de l'application pour le capteur. Les coefficients de couplage évoluent en fonction du champ magnétique statique à l'intérieur du matériau magnétostrictif. La division du problème en deux sous problèmes est utilisée comme dans le cas de l'inductance variable. Le premier sous problème consiste à calculer le champ magnétique statique, l'induction magnétique et l'aimantation à l'intérieur du matériau magnétostrictif. C'est un problème statique non linéaire couplé. Ces valeurs sont ensuite utilisées pour calculer les coefficients magnétostrictifs et la réductivité apparente qui sont utilisés dans le second sous problème. Ce dernier est un modèle harmonique linéaire couplé qui

#### 4. Applications

---

calcule le potentiel électrique harmonique à une fréquence de résonance avec des paramètres matériaux donnés.

Les résultats obtenus nous permettent de retrouver le module du champ magnétique statique dans le plan et peuvent donner une information sur son orientation. La comparaison qualitative avec les résultats expérimentaux confirme notre étude phénoménologie du phénomène physique du fonctionnement de tel capteur. Une comparaison quantitative reste à mener. Elle nécessite une connaissance précise des paramètres physiques des matériaux utilisés dans les dispositifs expérimentaux.





---

## Conclusions générales - Perspectives

La modélisation numérique des matériaux actifs se développe rapidement pour répondre aux besoins d'amélioration de dispositifs existants ou à la mise en place de systèmes innovants. Plusieurs approches (méthode des circuits équivalents, homogénéisation, etc.) sont possibles. Dans tous les cas, il est alors indispensable de disposer de lois de comportement pertinentes à intégrer dans ces outils numériques.

L'objectif de ce travail de thèse était de développer un modèle permettant de simuler le fonctionnement de dispositifs basés sur l'effet magnéto-électrique. Notre choix s'est porté sur la méthode des éléments finis. Ce modèle devra ensuite nous aider à concevoir différentes structures innovantes.

Dans un premier temps, nous avons établi des lois de comportement magnéto-électrique couplées. Le modèle piézoélectrique a été linéaire, contrairement à la loi de comportement de magnétostriction qui est non-linéaire. Nous avons décomposé la déformation totale en une déformation d'origine mécanique et d'origine magnétostrictive. La déformation de magnétostriction a été considérée comme une fonction quadratique du champ magnétique ou de l'aimantation. Chaque proposition mène à une loi de comportement de magnétostriction différente.

Afin de modéliser des dispositifs dans lequel il y a co-existence d'un champ statique et d'un champ dynamique de faible amplitude, nous avons proposé une étape de linéarisation des lois de comportement. Cette étape consiste à déterminer le point de fonctionnement fixé par le champ statique pour ensuite calculer la variation autour de ce point associée au champ dynamique.

Les deux lois de comportement ont ensuite été intégrées dans un code éléments finis 2D. En régime dynamique, l'émergence du couplage magnéto-électrique direct décrit par les équations de Maxwell cause des difficultés de calcul dans un modèle 2D. Certaines hypothèses ont été proposées. Un modèle complet a été mis en place dans le but de valider les hypothèses considérées dans la gamme de fréquence de travail. Le code de calcul éléments finis a ensuite été exploité pour différents dispositifs déjà mis en œuvre expérimentalement dans la littérature. La première application est une inductance variable contrôlée par un champ électrique. Malgré une méconnaissance de certaines valeurs des propriétés des matériaux, le calcul numérique et les résultats expérimentaux sont en bon accord d'un point de vue qualitatif.

Les travaux nous ont permis de modéliser des capteurs de champ magnétique. Ces



capteurs ont pour but de détecter précisément un champ magnétique statique. L'association de deux capteurs de ce type permet de connaître le module et l'orientation du champ magnétique dans le plan. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux a montré à nouveau une bonne concordance qualitative. Quelques améliorations de la structure du dispositif ont été proposées et évaluées à l'aide du modèle développé.

Quelques perspectives à ce travail sont suggérées ci-dessous :

- Afin d'imposer un champ magnétique homogène dans la structure, nous avons créé une boîte d'air qui englobe le dispositif étudié. Si les matériaux magnétostrictifs utilisés ont une très grande perméabilité (de l'ordre de  $10^5 \mu_0$ ), il est nécessaire d'augmenter le volume de la boîte d'air. Cela accroît fortement le nombre d'éléments de discrétisation. Une solution possible est la représentation de l'espace infini par un espace fini maillé. Le compromis entre la précision et le temps de calcul est important à étudier.
- Dans le modèle, les lois de comportement sont indépendantes de la contrainte. En pratique, la déformation de magnétostriction et la perméabilité peuvent dépendre fortement de l'état de contrainte. Une modification possible est de considérer la contrainte comme variable d'état. Dans ce cas, le code de calcul éléments finis devrait être modifié.
- Une comparaison quantitative avec des résultats expérimentaux est une étape obligatoire. Une collaboration avec l'Université de Technology de Hanoi (Vietnam) dans lequel le capteur a été mis en œuvre est place depuis 2010 et devra se poursuivre. Les difficultés sont de mesurer les propriétés électriques, magnétiques, et mécaniques de chaque constituant et de connaître précisément les conditions aux limites du dispositif.
- Le développement d'un modèle 3D est aussi une perspective attendue. L'inconvénient du modèle 3D est le temps de calcul. Cependant, il pourra nous permettre d'imaginer des structures plus complexes. Par exemple, l'association de trois capteurs pourrait mesurer le module et l'orientation d'un champ magnétique dans l'espace.

# Bibliographie

- [Azoum, 2005] AZOUM, K. (2005). *Contribution à la modélisation numérique de phénomènes magnéto-élastiques. Etude de dispositifs à base de matériaux magnétostrictifs*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud.
- [Bastos et Sadowski, 2003] BASTOS, J. A. et SADOWSKI, N. (2003). *Electromagnetic modeling by finite element methods*. Marcel Dekker Inc.
- [Belahcen, 2004] BELAHCEN, A. (2004). *Magnetoelasticity, magnetic forces and magnetostriction in electrical machines*. Thèse de doctorat, Helsinki University of Technology, Finland.
- [Bibes et Barthelemy, 2008] BIBES, M. et BARTHELEMY, A. (2008). Multiferroics : Towards a magnetoelectric memory. *Nature Materials*, 7:425–426.
- [Bichurin *et al.*, 2002] BICHURIN, M., PETROV, M. et KILIBA, Y. V. (2002). Magnetic and magnetoelectric susceptibilities of a ferroelectric/ferromagnetic composite at microwave frequencies. *Physical Review B*, 66(134404).
- [Bozorth, 1951] BOZORTH, R. (1951). *Ferromagnetism*. Van Nostrand.
- [Brissonneau, 1997] BRISSONNEAU, P. (1997). *Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique*. Hermes Science Publication.
- [Brown *et al.*, 1968] BROWN, W., HORNREICH, R., S. et SHTRIKMAN (1968). Upper bound on the magnetoelectric susceptibility. *Phys. Rev.*, 168(2):574–577.
- [Cai *et al.*, 2003] CAI, N., ZHAI, J., NAN, C., LIN, Y. et SHI, Z. (2003). Dielectric, ferroelectric, magnetic, and magnetoelectric properties of multiferroic laminated composites. *Physical Review B*, 68(224103).
- [Claeyssen *et al.*, 1997] CLAEYSSEN, F., LHERMET, N., LETTY, R. L. et BOUCHILLOUX, P. (1997). Actuators, transducers and motors based on giant magnetostriuctive materials. *Journal of Alloys and Compounds*, 258(1-2):61 – 73.
- [Clark et Belson, 1972] CLARK, A. et BELSON, H. S. (1972). Giant room-temperature magnetostrictions in tbf2 and dyfe2. *IEEE Transactions on Magnetics*, 477.
- [Crawford, 1961] CRAWFORD, A. (1961). Piezoelectric ceramic transformers and filters. *Journal of the British Institution of Radio Engineers*, 21(4):353–360.
- [Cullity, 1972] CULLITY, B. (1972). *Introduction to Magnetic Materials*. Addison-Wesley Publishing Company, London.

- [Curie et (1880a), 1880] CURIE, J. et (1880A), P. C. (1880). Développement, par pression, l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 91:294–295.
- [Curie et (1880b), 1880] CURIE, J. et (1880B), P. C. (1880). Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 91:383–387.
- [Curie et Curie, 1881] CURIE, J. et CURIE, P. (1881). Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux hémièdres à faces inclinées. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 93:1137–1140.
- [Curie, 1894] CURIE, P. (1894). Sur la symétrie dans les phénomènes physiques. symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique. *Journal de Physique*, 3:393.
- [Daniel *et al.*, 2008] DANIEL, L., HUBERT, O., BUIRON, N. et BILLADON, R. (2008). Reversible magneto-elastic behavior : A multiscale approach. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:1018–1042.
- [Delaere, 2002] DELAERE, K. (2002). *Computational and experimental analysis of electric machine vibrations caused by magnetic forces and magnetostriction*. Thèse de doctorat, Université de Leuven.
- [Dong *et al.*, 2003] DONG, S., LI, J.-F. et VIEHLAND, D. (2003). Ultrahigh magnetic field sensitivity in laminates of terfenol-d and pb.(mg<sub>1/3</sub>nb<sub>2/3</sub>.o<sub>3</sub>—pbtio<sub>3</sub> crystals. *Applied Physics Letters*, 83(11).
- [Dong *et al.*, 2006] DONG, S., LI, J.-F. et VIEHLAND, D. (2006). Small dc magnetic field response of magnetoelectric laminate composites. *Applied Physics Letters*, 88(082907).
- [Dong *et al.*, 2009] DONG, S., ZHAI, J., PRIYA, S., LI, J.-F. et VIEHLAND, D. (2009). Tunable features of magnetoelectric transformers. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 56(6).
- [du Trémolet de Lacheisserie, 1993] du Trémolet de LACHEISSERIE, E. (1993). *Magnétostriction - Theory and applications of magnetoelasticity*. CRC Press.
- [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a] du Trémolet de LACHEISSERIE, E. (1999a). *Magnétisme : I - Fondements*. Presses Universitaires de Grenoble.
- [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b] du Trémolet de LACHEISSERIE, E. (1999b). *Magnétisme : II - Matériaux et applications*. Presses Universitaires de Grenoble.
- [Dzyaloshinskii, 1959] DZYALOSHINSKII, I. E. (1959). On the magneto-electrical effects in antiferromagnets. *Soviet Physics-JETP*, 10:628–629.
- [Engdahl, 2000] ENGDAHL, G. (2000). *Handbook of giant magnetostrictive materials*. Academic Press.
- [Fang *et al.*, 2008] FANG, X., ZHANG, N. et WANG, Z. L. (2008). Converse magnetoelectric effects on heterotype electrostrain-piezopermeability composites. *Applied Physics Letters*, 93(102503).

- [Fetisov *et al.*, 2011] FETISOV, L. Y., PEROV, N. S., FETISOV, Y. K., SRINIVASAN, G. et PETROV, V. M. (2011). Resonance magnetoelectric interactions in an asymmetric ferromagnetic-ferroelectric layered structure. *Journal of Applied Physics*, 109(053908).
- [Fiebig, 2005] FIEBIG, M. (2005). Revival of the magnetoelectric effect. *Journal Physics D : Applied Physics*, 38:123–152.
- [Fink et Christiansen, 1989] FINK, D. G. et CHRISTIANSEN, D. (1989). *Electronics engineers' handbook*. McGraw-Hill.
- [Galopin, 2007] GALOPIN, N. (2007). *Modélisation et caractérisation de matériaux actifs pour la conception de dispositifs magnéto-électriques*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud.
- [Galopin *et al.*, 2008] GALOPIN, N., MININGER, X., DANIEL, L. et BOUILLAUT, F. (2008). Finite element modeling of magnetoelectric sensors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6).
- [Giang et Duc, 2009] GIANG, D. T. H. et DUC, N. H. (2009). Magnetoelectric sensor for microtesla magnetic-fields based on (fe80co20)78si12b10/pzt laminates. *Sensors and Actuators A*, 149:229–232.
- [Heywang *et al.*, 2008] HEYWANG, W., LUBITZ, K. et WOLFRAMWERSING (2008). *Piezoelectricity*. Springer.
- [Hirsinger, 1994] HIRSINGER, L. (1994). *Etude des déformations magnéto-élastiques dans les matériaux ferromagnétiques doux. Application à l'étude des déformations d'une structure de machine électrique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- [Hirsinger et Billardon, 1995] HIRSINGER, L. et BILLARDON, R. (1995). Magneto-elastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1877–1880.
- [Hristoforou et Ktena, 2007] HRISTOFOROU, E. et KTENA, A. (2007). Magnetostriction and magnetostrictive materials for sensing applications. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 316(2):372 – 378.
- [Jiles et Lo, 2003] JILES, D. et LO, C. (2003). The role of new materials in the development of magnetic sensors and actuators. *Sensors and Actuators A : Physical*, 106(1-3):3–7.
- [Joule, 1847] JOULE, J. (1847). On the effects of magnetism upon the dimensions of iron and steel bars. *Philosophical Magazine*, 30.
- [Kedous-Lebouc, 2006] KEDOUS-LEBOUC, A. (2006). *Matériaux magnétiques en génie électrique*. Hermès.
- [Kellog *et al.*, 2003] KELLOG, R., FLATAU, A., CLARK, A., WUN-FOGLE, W. et LOGRASSO, T. (2003). *Quasi-static transduction characterization of galfenol*. In Proceedings de IMECE'03 : ASME International Mechanical Engineering Congress.

- [Koc *et al.*, 2000] KOC, B., BOUCHILLOUX, P. et K. UCHINO (2000). Piezoelectric micromotor using a metal-ceramic composite structure. *IEEE Transactions on Ultrasonic*, 47(4):836–843.
- [Lou *et al.*, 2009] LOU, J., REED, D., LIU, M. et SUN, N. X. (2009). Electrostatically tunable magnetoelectric inductors with large inductance tunability. *Applied Physics Letters*, 94(112508).
- [Maxwell, 1885a] MAXWELL, J. (1885a). *Traité d'électricité et de magnétisme - Tome 1*. Gauthier-Villars.
- [Maxwell, 1885b] MAXWELL, J. (1885b). *Traité d'électricité et de magnétisme - Tome 2*. Gauthier-Villars.
- [Medill, 1953] MEDILL, J. (1953). A miniature piezoelectric microphone. *IEEE*, 1(6):7–10.
- [Mindlin, 1952] MINDLIN, R. (1952). Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates. *Journal Applied Physics*, 23(1):83–88.
- [Murayama et Mizutani, 2002] MURAYAMA, R. et MIZUTANI, K. (2002). Conventional electromagnetic acoustic transducer development for optimum lamb wave modes. *Ultrasonics*, 40(1-8):491–495.
- [Nan, 1994] NAN, C. (1994). Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. *Physical Review B*, 50:6082–6088.
- [Nan *et al.*, 2008] NAN, C., BICHURIN, M., DONG, S., VIEHLAND, D. et SRINIVASAN, G. (2008). Multiferroic magnetoelectric composites : Historical perspective, status, and future directions. *Applied Physics Reviews : Focused Review*, 103(031101).
- [Nguyen *et al.*, 2011a] NGUYEN, T. T., BOUILLAUT, F., DANIEL, L. et MININGER, X. (2011a). Finite element modeling of magnetic field sensors based on nonlinear magnetoelectric effect. *Journal of Applied Physics*, 109.
- [Nguyen *et al.*, a] NGUYEN, T. T., DANIEL, L., BOUILLAUT, F. et MININGER, X. Modeling of magneto-electric sensor using finite element method, accepté. *European Journal of Electrical Engineering*.
- [Nguyen *et al.*, b] NGUYEN, T. T., F. BOUILLAUT, MININGER, X. et DANIEL, L. The role of the normal component of  $e$  and  $h$  in 2d computation of extrinsic magneto-electric problem using  $e$ - $h$  formulation, soumis. *IEEE Transactions on Magnetism*.
- [Nguyen *et al.*, 2011b] NGUYEN, T. T., MININGER, X., BOUILLAUT, F. et DANIEL, L. (2011b). Finite element harmonic modeling of magnetoelectric effect. *IEEE Transactions on Magnetism*, 47.
- [Park *et al.*, 2009] PARK, C.-S., AHN, C.-W., RYU, J., YOON, W.-H., PARK, D.-S., KIM, H.-E. et PRIYA, S. (2009). Design and characterization of broadband magnetoelectric sensor. *Journal of Applied Physics*, 105(094111).
- [Parzen, 1983] PARZEN, B. (1983). *Design of Crystal and Other Harmonic Oscillators*. Wiley, New York.

- [Petrov *et al.*, 2007] PETROV, M., SRINIVASAN, G., M.I.BICHURIN et GUPTA, A. (2007). Theory of magnetoelectric effects in ferrite piezoelectric nanocomposites. *Physical Review B*, 75(224407).
- [Piefort, 2001] PIEFORT, V. (2001). *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles.
- [Rado *et al.*, 1984] RADO, G. T., FERRARI, J. M., et MAISCH, W. G. (1984). Magnetoelectric susceptibility and magnetic symmetry of magnetoelectrically annealed tbpo4. *Physical Review B*, 29:4041–4048.
- [Reddy, 1993] REDDY, J. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Inc.
- [Setter, 2002] SETTER, N. (2002). *Piezoelectric materials in devices*. Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne.
- [Shen *et al.*, 2005] SHEN, Z. Y., LI, G. Q. et CHAN, S. L. (2005). *Advances in steel structures*. Elsevier.
- [Srinivasan *et al.*, 2001] SRINIVASAN, G., RASMUSSEN, E., GALLEGOS, J., SRINIVASAN, R., BOKHAN, Y. et LALETIN, V. (2001). Magnetoelectric bilayer and multilayer structures of magnetostrictive and piezoelectric oxides. *Physical Review B*, 64(214408).
- [Suchtelen, 1972] SUCHTELEN, J. V. (1972). Product properties : a new application of composite materials. *Philips Research Reports*, 27(1):28–37.
- [Tellegen, 1948] TELLEGEN, B. D. H. (1948). The gyrator, a new electric network element. *Philips Research reports*, 3:81–101.
- [Ueno et Higuchi, 2005] UENO, T. et HIGUCHI, T. (2005). Magnetic sensor for high temperature using a laminate composite of magnetostrictive material and piezoelectric material. *Smart Structures and Materials*, 5761:156–163.
- [Villari, 1865] VILLARI, E. (1865). Change of magnetization by tension and electric current. *Philosophical Magazine*, 128.
- [Wan *et al.*, 2003] WAN, J. G., LIU, J. M., CHAND, H. L. W., CHOY, C. L., WANG, G. H. et NAN, C. W. (2003). Giant magnetoelectric effect of a hybrid of magnetostrictive and piezoelectric composites. *Journal of Applied Physics*, 93(12).
- [Y.X.Liu *et al.*, 2003a] Y.X.LIU, WAN, J., LIU, J.-M. et NAN, C. (2003a). Effect of magnetic bias field on magnetoelectric coupling in magnetoelectric composites. *Journal of Applied Physics*, 94(5118).
- [Y.X.Liu *et al.*, 2003b] Y.X.LIU, WAN, J., LIU, J.-M. et NAN, C. (2003b). Numerical modeling of magnetoelectric effect in a composite structure. *Journal of Applied Physics*, 94(5111).
- [Zienkiewicz *et al.*, 1967] ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR, R. et ZHU, J. (1967). *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann.



# Annexes





# Annexe A

## Notation et Opération sur des vecteurs et tenseurs

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Notation sur des tenseurs symétriques . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>A.2</b>	<b>Convention de sommation d'Einstein . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>A.3</b>	<b>Opérations sur les tenseurs . . . . .</b>	<b>112</b>
A.3.1	L'opérateur produit contracté . . . . .	112
A.3.2	L'opérateur produit doublement contracté . . . . .	112
<b>A.4</b>	<b>Gradient . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>A.5</b>	<b>Rotationnel . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>A.6</b>	<b>Divergence . . . . .</b>	<b>113</b>

---



## A.1 Notation sur des tenseurs symétriques

La notation de Voigt utilisé pour les tenseurs symétriques :

- Tenseur d'ordre 2 : Notation tensorielle  $\mathbb{S} : s_{ij}, (i, j) \in \mathcal{A}^2, \mathcal{A} = 1, 2, 3$   
Notation vectorielle  $\mathbf{S} : s_i, i \in \mathcal{B}, \mathcal{B} = 1, \dots, 6$   
avec  $\mathbf{S} = (s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2s_{23}, 2s_{31}, 2s_{12})^t$   
et  $\mathbf{T} = (t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12})^t$
- Tenseur d'ordre 4 : Notation tensorielle  $\mathbb{C} : C_{ijkl}, (i, j, k, l) \in \mathcal{A}^4, \mathcal{A} = 1, 2, 3$   
Notation tensorielle  $\mathbf{C} : C_{ij}, (i, j) \in \mathcal{B}^2, \mathcal{B} = 1, \dots, 6$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{pmatrix}$$

La matrice utilisant les coefficients de Lamé correspondant :

$$\begin{pmatrix} 2\mu^* + \lambda^* & \lambda^* & \lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^* & 2\mu^* + \lambda^* & \lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^* & \lambda^* & 2\mu^* + \lambda^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* \end{pmatrix}$$

## A.2 Convention de sommation d'Einstein

La convention de sommation d'Einstein permet de raccourcir des équations lorsque l'on écrit les tenseurs sous forme indicielle. Lorsqu'un indice apparaît deux fois dans un terme, on sous entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Par exemple, le terme :

$$A_i = b_{ij}c_j \quad (\text{A.1})$$

signifie dans une base orthonormée :

$$A_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij}c_j \quad (\text{A.2})$$

Un autre exemple dans le cas où plusieurs indices sont répétés

$$A_{ij} = b_{ijkl}c_{kl} \quad (\text{A.3})$$

signifie dans une base orthonormée :

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_{ijkl}c_{kl} \quad (\text{A.4})$$

Ceci peut être généralisé à une sommation sur n indices répétés.

## A.3 Opérations sur les tenseurs

### A.3.1 L'opérateur produit contracté

L'opérateur produit contracté "." indique la sommation sur un seul indice. Par exemple : le produit contracté sur deux vecteurs **A** et **B** sur une base orthonormée est un scalaire :

$$C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow C = A_i B_i \quad (\text{A.5})$$

L'opérateur peut s'effectuer sur des tenseurs d'ordre plus élevé.

$$C_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow C_i = A_{ij} B_j \quad (\text{A.6})$$

### A.3.2 L'opérateur produit doublement contracté

L'opérateur produit doublement contracté ":" indique la sommation sur deux indices. Par exemple : le produit tensoriel doublement contracté sur deux matrices **A** et **B** dans une base orthonormée est un scalaire :

$$C = \mathbf{A} : \mathbf{B} \rightarrow C = A_{ij} B_{ij} \quad (\text{A.7})$$

L'opérateur peut s'effectuer sur des tenseurs d'ordre plus élevé.

$$C_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow C_k = A_{ijk} B_{ij} \quad (\text{A.8})$$

## A.4 Gradient

L'opérateur **grad** peut s'appliquer sur des scalaires et des vecteurs. Dans un repère cartésien (x, y, z), le gradient d'un scalaire **A** et d'un vecteur **B** sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \, A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \mathbf{grad} \, \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

## A.5 Rotationnel

L'opérateur **rotationnel** s'applique sur des vecteurs. Dans un repère (x, y, z), le **rotationnel** d'un vecteur **A** est défini comme suit :

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

## A.6 Divergence

L'opérateur divergence peut s'appliquer sur des vecteurs ou des matrices. Dans un repère (x, y, z), la divergence d'un vecteur **A** et d'une matrice **B** est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \mathbf{div} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$



# Annexe B

## Loi de comportement d'électrostriction

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Loi de comportement d'électrostriction . . . . .</b>	<b>117</b>
B.1.1	Etude énergétique . . . . .	117
B.1.2	Loi de comportement mécanique . . . . .	118
B.1.3	Loi de comportement électrique . . . . .	118
<b>B.2</b>	<b>Loi de comportement linéaire piézoélectrique . . . . .</b>	<b>120</b>
B.2.1	Modèle équivalent . . . . .	120

---





## B.1 Loi de comportement d'électrostriction

Les lois de comportement des matériaux électrostrictifs sont considérées non-linéaires. Nous proposons d'établir ces relations basées sur l'étude énergétique. La déformation totale est décomposée en une contribution d'origine mécanique et une d'origine électrostrictive. Les variables d'état sont le champ électrique  $\mathbf{D}$  et la déformation  $\mathbb{S}$ .

### B.1.1 Etude énergétique

Pour un matériau électrostrictif, le travail total  $\mathcal{W}$  inclut le travail magnétique et le travail électrique, lors de variations élémentaires  $d\mathbf{D}$  et  $d\mathbb{S}$ , et s'écrit :

$$d\mathcal{W} = e_i dd_i + t_{ij} ds_{ij} \quad (\text{B.1})$$

A partir de l'équation (2.63), le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le tenseur des contraintes  $\mathbb{T}$  sont calculés en dérivant le travail total :

$$\begin{aligned} e_i &= \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial d_i} \right|_{\mathbb{S}} \\ t_{ij} &= \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s_{ij}} \right|_{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Comme le travail total est une fonction de classe  $\mathbb{C}^2$ , les dérivées croisées partielles secondes sont continues, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_m}{\partial s_{ij}} &= \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial d_m \partial s_{ij}} \\ \frac{\partial t_{ij}}{\partial d_m} &= \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial s_{ij} \partial d_m} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

D'après le théorème de Schwarz, on en déduit l'égalité :

$$e_{mij} = \frac{\partial e_m}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial d_m} \quad (\text{B.4})$$

où le terme  $\mathfrak{e}$  caractérise le couplage électro-mécanique. A partir de l'intégration de l'équation (B.3), on peut écrire la loi de comportement électro-mécanique pour les variables d'état choisies  $\mathbf{B}$  et  $\mathbb{S}$  :

$$\begin{aligned} e_i(\mathbf{D}, \mathbb{S}) &= e_i^0(\mathbf{D}, \mathbb{0}) + \int_0^{s_{kl}} e_{ikl}|_{\mathbf{D}} ds_{kl} \\ t_{ij}(\mathbf{D}, \mathbb{S}) &= t_{ij}(\mathbf{0}, \mathbb{S}) + \int_0^{d_k} q_{kij}|_{\mathbb{S}} dd_k \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Le calcul d'intégrale dans l'équation (B.5) sera simplifié en considérant les lois de comportement mécanique et électrique.

### B.1.2 Loi de comportement mécanique

La déformation totale dans un matériau piézoélectrique peut se composer en deux parties : une déformation élastique  $\mathbb{S}^e$  et une déformation piézoélectrique  $\mathbb{S}^\epsilon$ , dépendant uniquement du champ électrique appliqué :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^e + \mathbb{S}^\epsilon \quad (\text{B.6})$$

Le tenseur mécanique s'écrit :

$$t_{ij} = C_{ijkl}(s_{kl} - s_{kl}^\epsilon) = C_{ijkl}s_{kl} - t_{ij}^\epsilon \quad (\text{B.7})$$

### B.1.3 Loi de comportement électrique

La loi de comportement proposée dans l'équation (B.5) correspond à la condition expérimentale :  $\mathbb{S} = \mathbb{0}$ . Cette condition est difficile à obtenir expérimentalement car il faut bloquer tout déplacement de l'échantillon. On considère alors à une autre condition qui est à un fonctionnement contrainte nulle.

A contrainte nulle, l'équation (B.5) devient :

$$d_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\epsilon) = d_i^0(\mathbf{E}, \mathbb{0}) + \int_0^{s_{kl}^\epsilon} \alpha_{ikl}|_{\mathbf{E}} ds_{kl} \quad (\text{B.8})$$

On en déduit :

$$d_i^0(\mathbf{E}, \mathbb{0}) = d_i(\mathbf{E}, \mathbb{S}^\epsilon) - \int_0^{s_{kl}^\epsilon} \alpha_{ikl}|_{\mathbf{B}} ds_{kl} \quad (\text{B.9})$$

En remplaçant B.9 dans l'équation B.5, on obtient la loi de comportement correspondant à un comportement à contrainte nulle :

$$d_i(\mathbf{E}, \mathbb{S}) = d_i(\mathbf{E}, \mathbb{S}^\epsilon) + \int_{\mathbb{S}^\epsilon}^{\mathbb{S}} \alpha_{ikl}|_{\mathbf{B}} ds_{kl} \quad (\text{B.10})$$

Etant donné que  $\mathbb{S}^e$  ne dépend pas de  $\mathbf{E}$  :

$$\alpha_{ijk} = \frac{\partial t_{jk}}{\partial e_i} = -\frac{\partial t_{kl}^\epsilon}{\partial e_i} \quad (\text{B.11})$$

$\mathbb{S}^\epsilon$  ne dépend que de  $\mathbf{E}$ , la loi de comportement électrique devient :

$$d_i(\mathbf{E}, \mathbb{S}) = d_i(\mathbf{E}, \mathbb{S}^\epsilon) - \frac{\partial t_{kl}^\epsilon}{\partial e_i} (s_{kl} - s_{kl}^\mu) \quad (\text{B.12})$$

Le terme  $d_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\epsilon)$  est l'induction électrique du matériau si le matériau n'est soumis à aucune contrainte mécanique.

Pour calculer la matrice de couplage  $\frac{\partial t_{kl}^\mu}{\partial e_i}$ , les hypothèses sont les suivantes :

- Les déformations piézoélectriques sont à volume constant.
- Le matériau est isotrope.

Comme le matériau est isotrope et la déformation est isochore, on peut utiliser l'équation de Lamé pour avoir :

$$t_{ij}^\epsilon = 2\mu^* s_{ij}^\epsilon \quad (\text{B.13})$$

Le but maintenant est de chercher la relation entre  $\mathbb{S}^\epsilon$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$ . Pour le faire, on établit la relation dans le repère lié à l'échantillon piézoélectrique ( $e_{\parallel}$ ,  $e_{\perp 1}$ ,  $e_{\perp 2}$ ), puis on utilise la méthode d'Euler pour le changement de repère.

Le modèle quadratique piézoélectrique dans le repère du champ électrique ( $e_{\parallel}$ ,  $e_{\perp 1}$ ,  $e_{\perp 2}$ ) proposé est :

$$\mathbb{S}^\mu = \begin{bmatrix} s_{11}^\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & s_{33}^\epsilon \end{bmatrix} = \alpha_0 \mathbf{E}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Dans la base du matériau ( $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ), le tenseur de déformation de piézoélectricité s'écrit :

$$\mathbb{S}^\epsilon = \alpha_0 \begin{bmatrix} e_1^2 - \frac{e_2^2 + e_3^2}{2} & \frac{3}{2}e_1e_2 & \frac{3}{2}e_1e_3 \\ \frac{3}{2}e_2e_1 & e_2^2 - \frac{e_1^2 + e_3^2}{2} & \frac{3}{2}e_2e_3 \\ \frac{3}{2}e_3e_1 & \frac{3}{2}e_3e_2 & e_3^2 - \frac{e_1^2 + e_2^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

La forme indicielle associée est définie par :

$$s_{kl}^\epsilon = \frac{\alpha_0}{2} (3e_k e_l - \delta_{kl} \|\mathbf{E}\|^2) \quad (\text{B.16})$$

En utilisant le même calcul de l'équation (2.48) dans le chapitre 2, on obtient :

$$\begin{aligned} t_{kl}^\epsilon &= \alpha_0 \mu^* (3e_k e_l - \delta_{kl} \|\mathbf{E}\|^2) \\ \frac{\partial t_{kl}^\epsilon}{\partial e_i} &= \alpha_0 \mu^* (-2\delta_{kl} e_i + 3\delta_{ik} e_k + 3\delta_{il} e_l) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

L'équation permet de connaître les coefficients de couplage dans la loi de comportement piézoélectrique non-linéaire qui s'écrit :

#### Lois de comportement du matériau piézoélectrique

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijkl} s_{kl} - t_{ij}^\epsilon \\ d_i &= \epsilon_{ij} e_j - \frac{\partial t_{kl}^\epsilon}{\partial e_i} (s_{kl} - s_{kl}^\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

En notant :  $d_i^{es} = \frac{\partial t_{kl}^\epsilon}{\partial e_i} (s_{kl} - s_{kl}^\epsilon)$  (le terme de couplage dans l'équation (B.18), l'induction électrique s'écrit sous la forme matricielle :

$$\mathbf{D}^{es} = 2\alpha_0 \mu^* \boldsymbol{\epsilon}^\epsilon \mathbf{E} \quad (\text{B.19})$$

où la perméabilité équivalente  $\epsilon^e$  est :

$$\begin{bmatrix} 2s_{11}^e - s_{22}^e - s_{33}^e & 3(s_{12} - s_{12}^e) & 3(s_{13} - s_{13}^e) \\ 3(s_{21} - s_{21}^e) & 2s_{22}^e - s_{11}^e - s_{33}^e & 3(s_{23} - s_{23}^e) \\ 3(s_{31} - s_{31}^e) & 3(s_{32} - s_{32}^e) & 2s_{33}^e - s_{11}^e - s_{22}^e \end{bmatrix}$$

## B.2 Loi de comportement linéaire piézoélectrique

Pour les lois de comportement du matériau piézoélectrique, si l'application est dans la gamme linéaire, qui est le cas pour le capteur de champ magnétique, la linéarisation autour d'un point de fonctionnement n'est pas nécessaire. Les coefficients de couplage sont donnés par les constructeurs. En revanche, si l'application n'est pas linéaire, la situation ressemble au modèle quadratique de l'induction magnétique, il faut linéariser la loi de comportement. Pour trouver la loi de comportement autour d'un point de fonctionnement dans le modèle non-linéaire, on dérive l'équation (B.18) :

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij} &= C_{ijkl}^{pz} \tilde{s}_{kl} - \frac{\partial t_{ij}^e}{\partial e_k} \tilde{e}_k \\ \tilde{e}_i &= -\frac{\partial t_{kl}^e}{\partial e_i} \tilde{s}_{kl} + \left[ \frac{\partial \epsilon_{ik} e_k}{\partial e_j} - \frac{\partial^2 t_{kl}^e}{\partial e_i \partial e_j} (s_{kl} - s_{kl}^e) + \frac{\partial t_{kl}^e}{\partial e_i} \frac{\partial s_{kl}^e}{\partial e_j} \right] \tilde{e}_j \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

L'équation (B.20) introduit trois termes à calculer :

- $\frac{\partial t_{ij}^e}{\partial e_k}$  est le terme de couplage.
- $\frac{\partial \epsilon_{ik} e_k}{\partial e_j}$  est le terme de permittivité initiale.
- $\frac{\partial^2 t_{kl}^e}{\partial e_i \partial e_j} (s_{kl} - s_{kl}^e)$  et  $\frac{\partial t_{kl}^e}{\partial e_i} \frac{\partial s_{kl}^e}{\partial e_j}$  sont deux termes supplémentaires qui contribuent à la permittivité.

Toutes ces expressions ressemblent à celles obtenus dans le cas du modèle quadratique de magnétostriction. On peut appliquer alors le même calcul que dans le modèle quadratique de magnétostriction (équation (2.59) et équation (2.61)). Les résultats sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_{ik} e_k}{\partial e_j} &= \epsilon_{ij} + \frac{\partial \epsilon_{ii}}{\partial e} \frac{e_i e_j}{e} \\ \epsilon_{ij}^* &= 4\mu^* \alpha_0 (3s_{ij} - \delta_{ij} s_{kk}) \\ \frac{\partial t_{kl}^e}{\partial e_i} \frac{\partial s_{kl}^e}{\partial e_j} &= 6e_i e_j + 18\delta_{ij} c_i^2 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

### B.2.1 Modèle équivalent

Les deux modèles permettent d'établir une loi de comportement sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} & -\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^t \\ -\tilde{\boldsymbol{\alpha}} & \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}} \\ \tilde{\mathbf{E}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Dans l'équation (B.22), les coefficients pour le modèle linéaire sont constants pour tous les points de fonctionnement. Cependant, ces coefficients dépendent du point de fonctionnement pour le cas non-linéaire.



# Annexe C

## Notes sur les formulations éléments finis

### Sommaire

---

C.1	Formulation éléments finis utilisant les variables $\mathbf{t}^*$ , $\mathbf{a}^*$	125
-----	--	-----

---





## C.1 Formulation éléments finis utilisant les variables $t^*$ , $a^*$

Dans le chapitre 3, la formulation éléments finis utilise les variables  $t^*$  et  $a^*$ . On va aborder dans cette partie les calculs essentiels pour obtenir la formulation éléments finis à partir de l'équation (3.79) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\parallel}(\mathbb{r}^*(\epsilon_{\parallel} + \frac{\sigma}{j\omega}\mathbb{I})^{-1}\mathbb{r}^* \mathbf{grad} t^* - \mathbb{r}^* \kappa_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel}) &= \omega^2 \nu_{\perp}^{-1} t^* \\ \operatorname{div}_{\parallel}(\mathbb{r}^* \nu_{\parallel} \mathbb{r}^* \mathbf{grad} a^* - \mathbb{r}^* \mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel}) &= (-j\omega\sigma + \omega^2 \epsilon_{\perp}) a^* \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

On note :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\epsilon_{\parallel} + \frac{\sigma}{j\omega}\mathbb{I})^{-1} \\ \mathbf{B} &= (-j\omega\sigma + \omega^2 \epsilon_{\perp}) \\ \mathbf{X} &= \mathbb{r}^*(\epsilon_{\parallel} + \frac{\sigma}{j\omega}\mathbb{I})^{-1}\mathbb{r}^* \mathbf{grad} t^* - \mathbb{r}^* \kappa_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel} \\ \mathbf{Y} &= \mathbb{r}^* \nu_{\parallel} \mathbb{r}^* \mathbf{grad} a^* - \mathbb{r}^* \mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

La formulation faible du problème est :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} w \operatorname{div}_{\parallel}(\mathbb{r}^* \mathbf{A} \mathbb{r}^* \mathbf{grad} t^* - \mathbb{r}^* \kappa_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel}) d\omega &= \int_{\omega} \omega^2 \nu_{\perp}^{-1} t^* w d\omega \\ \int_{\omega} w \operatorname{div}_{\parallel}(\mathbb{r}^* \nu_{\parallel} \mathbb{r}^* \mathbf{grad} a^* - \mathbb{r}^* \mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel}) d\omega &= \int_{\omega} \mathbf{B} w d\omega \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

En utilisant la relation :

$$\operatorname{div}(w \mathbf{X}) = w \operatorname{div}(\mathbf{X}) + \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{X} \quad (\text{C.4})$$

puis par intégration par parties, le premier terme  $\int_{\omega} w \operatorname{div} \mathbf{X}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} w \operatorname{div} \mathbf{X} d\omega &= \int_{\omega} \operatorname{div}(w \mathbf{X}) d\omega - \int_{\omega} \mathbf{grad}_{\parallel} w \cdot \mathbf{X} d\omega \\ &= \oint_{\Gamma} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} w d\Gamma - \int_{\omega} \mathbf{grad}_{\parallel} w \cdot \mathbf{X} d\omega \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

où  $\Gamma$  est le contour de  $\omega$ .

L'équation (C.5) permet de modifier l'équation (C.3), ce qui conduit à :

$$\int_{\omega} \mathbf{grad}_{\parallel} w \cdot \mathbf{X} d\omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} w d\Gamma - \int_{\omega} \omega^2 \nu_{\perp}^{-1} t^* w d\omega \quad (\text{C.6})$$

Il s'agit ensuite d'écrire tous les termes de l'équation (C.1) :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \mathbf{grad}_{\parallel} w \cdot (\mathbb{r}^* \mathbf{A} \mathbb{r}^* \mathbf{grad} t^* - \mathbb{r}^* \kappa_{\parallel} \mathbf{S}_{\parallel}) d\omega &= \oint_{\Gamma} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} w d\Gamma \\ &\quad - \int_{\omega} \omega^2 \nu_{\perp}^{-1} t^* w d\omega \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

En remplaçant  $\mathbb{S} = \mathbb{D} \mathbf{u}$  dans l'équation (C.7), on obtient :

$$\int_{\omega} \mathbf{grad}_{\parallel} w \cdot \left( \mathbb{r}^* \mathbf{A} \mathbb{r}^* \mathbf{grad} t^* - \mathbb{r}^* \mathbb{K}_{\parallel} \mathcal{D} \mathbf{u} \right) d\omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} w d\Gamma + \int_{\omega} \omega^2 \nu_{\perp}^{-1} t^* d\omega \quad (\text{C.8})$$

L'équation (C.8) s'écrit sous forme discrétisée :

$$\sum_e \int_{\omega^e} [G_v] \mathbb{r}^* \mathbb{K}_{\parallel} [G_u] \{\mathbf{u}\} d\omega + \sum_e \int_{\omega^e} [G_v] \mathbb{r}^* \mathbf{A} \mathbb{r}^* [G_v] \{t^*\} d\omega = \sum_e \oint_{\Gamma_s} X_n [N_v]^t d\Gamma + \sum_e \int_{\omega^e} \omega^2 \nu_{\perp}^{-1} [N_v]^t t^* d\omega \quad (\text{C.9})$$

avec  $X_n$  la composante de  $\mathbf{X}$  perpendiculaire à  $\Gamma$ .

La formulation sous forme matricielle s'écrit :

$$[\mathbb{K}_{up}]^t \{\mathbf{u}\} + [\mathbb{K}_{pp}] \{t^*\} = [Q] + [Q_n] \quad (\text{C.10})$$

où :

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_{pp}] &= \sum_e \int_{\omega^e} [G_v]^t [\mathbb{r}^* \mathbf{A} \mathbb{r}^*] [G_v] d\omega \\ [\mathbb{K}_{pp}] &= \sum_e \int_{\omega^e} [G_v]^t [\mathbb{r}^* \mathbb{K}_{\parallel}] [G_u] d\omega \\ [Q] &= \sum_e \int_{\omega^e} \omega^2 \nu_{\perp}^{-1} [N_v]^t t^* d\omega \\ [Q_n] &= \sum_e \oint_{\Gamma_s} X_n [N_v]^t d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Cette équation correspond à l'équation électrique classique avec un terme supplémentaire de couplage électro-mécanique.

# Annexe D

## Algorithmes du modélisation du capteur magnétique

### Sommaire

---

<b>D.1</b>	<b>Calcul statique . . . . .</b>	<b>129</b>
D.1.1	Initialisation . . . . .	129
D.1.2	Calcul itératif et convergence . . . . .	129
D.1.3	Algorithme de la partie statique . . . . .	129
<b>D.2</b>	<b>Calcul harmonique . . . . .</b>	<b>130</b>
D.2.1	Calcul des coefficients de magnétostriction . . . . .	130
D.2.2	Calcul de la tension . . . . .	131

---



## D.1 Calcul statique

Le calcul statique permet de déterminer le champ et l'induction magnétique statique dans les matériaux magnétostrictifs. La partie suivante précise la démarche suivie.

### D.1.1 Initialisation

Nous commençons le calcul par l'imposition une valeur initiale de perméabilité. Le champ et l'induction magnétique sont calculés à l'intérieur des matériaux magnétostrictifs en fonction du champ magnétique appliqué. Cet étape est important pour calculer les coefficients de couplage magnétostrictif.

### D.1.2 Calcul itératif et convergence

On met à jour la valeur de perméabilité en considérant le champ statique vient être obtenu et la courbe d'aimantation (equation (D.1)).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\| &= \mu_0(\|\mathbf{H}\| + \|\mathbf{M}\|) \\ \|\mathbf{B}\| &= \mu_0 \left[ \|\mathbf{H}\| + M_s \left( \frac{1}{\tanh\left(\frac{3\mu_0\chi_0 \|\mathbf{H}\|}{M_s}\right)} - \frac{M_s}{3\mu_0\chi_0 \|\mathbf{H}\|} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

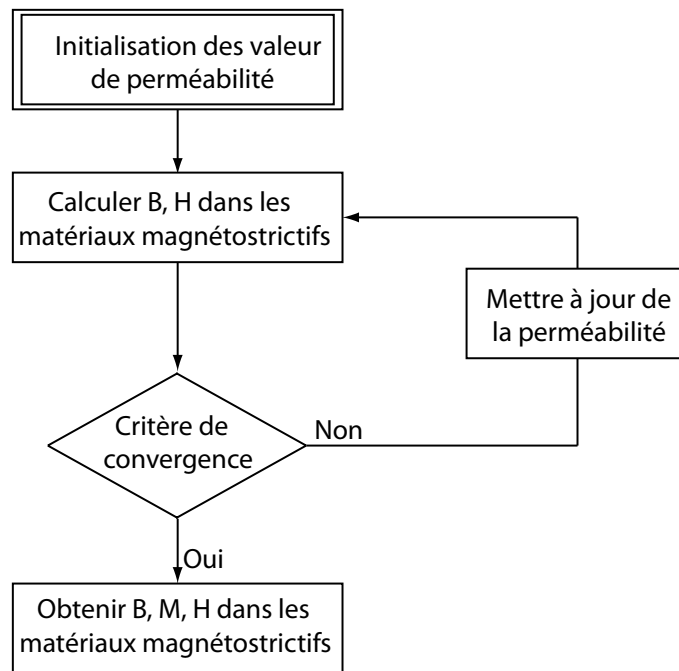
où  $\mu_0$  désigne la perméabilité du vide,  $M_s$  l'aimantation à saturation et  $\chi_0$  la susceptibilité magnétique initiale (à champ nul) du matériau. Afin de minimiser la différence entre ces deux valeurs, le calcul est réalisé de manière itérative. Le critère de convergence à une étape ( $k+1$ ) est défini par :

$$\frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{B}^{k+1} - \mathbf{B}^k\|}{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{B}^{k+1}\|} < \delta \quad (\text{D.2})$$

où  $k$  représente le numéro d'itération,  $\delta$  une valeur à imposer par l'utilisateur. Pour notre étude, on a imposé  $\delta = 10^{-4}$  pour avoir un bon compromis entre le temps de calcul et la précision obtenue.

### D.1.3 Algorithme de la partie statique

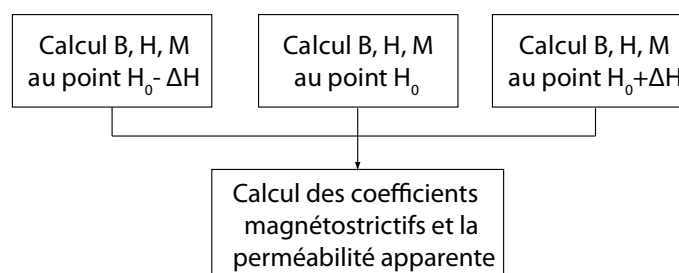
L'algorithme de la partie statique est le suivant :

Figure D.1 – *Algorithme du calcul statique*

## D.2 Calcul harmonique

### D.2.1 Calcul des coefficients de magnétostriction

Le calcul des coefficients de couplage magnétostrictif et de la perméabilité apparente au point de polarisation est basé sur la connaissance du champ  $\mathbf{H}$ , de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , de l'aimantation  $\mathbf{M}$ , et de la dérivée du rapport  $\frac{M^2}{B^2}$  par rapport à  $\mathbf{B}$ . Afin de calculer cette dérivée, on a calculé également ces valeurs pour deux points proches du point de polarisation. L'algorithme de calcul est proposé comme suit :

Figure D.2 – *Algorithme de calcul des coefficients magnétostrictifs et de la perméabilité*

### D.2.2 Calcul de la tension

Après obtention des coefficients magnétostrictifs et de la perméabilité apparente du matériau magnétostrictif utilisé, le but est de calculer la tension au bord des électrodes. Un champ magnétique dynamique est appliqué à une fréquence, les lois de comportement dans cette partie est supposées linéaire. les paramètres du matériau piézoélectrique sont données par constructeurs. Les paramètres du matériau magnétostrictif sont calculées dans la partie précédente. Nous pouvons alors calculer facilement la tension sur les électrodes.



